M7 – FORCES CENTRALES CONSERVATIVES – CAS DE L'INTERACTION NEWTONIENNE

OBJECTIFS

• Un point fréquemment rencontré en physique concerne le mouvement d'un point matériel soumis à une force constamment dirigée vers un point fixe – qu'on appelle « **force centrale** »(➜ Cf §**I**). cette situation se rencontre en particulier :
- à l'**échelle microscopique**, avec, dans le cadre de la mécanique classique, par exemple, le cas d'un électron soumis à l'action d'un noyau atomique,
- à l'**échelle astronomique** lorsque nous observons, par exemple, le mouvement des astres soumis à la force de gravitation du Soleil.

• L'étude de ce problème est grandement simplifiée par :
- l'utilisation des deux théorèmes généraux de la mécanique du point : le **Théorème du Moment Cinétique** rencontré dans la leçon **M6** (➜ Cf §**II**) et le **Théorème de l'Énergie Mécanique** connu depuis le leçon **M3** (➜ Cf §**III**).
- l'introduction de la notion d'« **énergie potentielle effective** » (➜ Cf §**IV**).

• La seconde partie de ce cours (§**V**) concerne l'**interaction newtonienne** avec l'étude spécifique du mouvement d'un point matériel dans le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle fixe.
Les résultats obtenus peuvent être appliqués à la majorité des mouvements observés en astronomie : ceux des planètes autour d'une étoile et des satellites naturels ou artificiels autour des planètes. Dans la leçon **M10**, nous verrons comment réutiliser ces résultats dans le cas où le centre de force n'est pas fixe.

Comète Hale-Bopp vue de la Terre en 1997

I Forces centrales conservatives

I.1 Champ de forces centrales

◇ **Définition :** Soit O un point fixe du référentiel $\mathcal{R}$ d'étude.

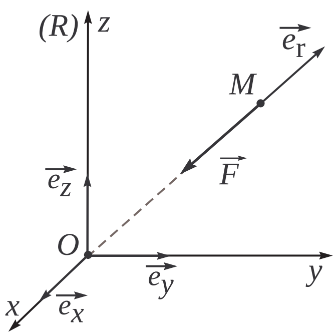
• Lorsqu'en tout point M de l'espace, un point matériel est soumis à une force $\overrightarrow{F}(M)$ colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OM}$, on parle de **champ de forces centrales** :

$$\forall M \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{F} \text{ est une force centrale}$$

• On appelle O le **centre de force**.

• Avec la définition du vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$ des coordonnées sphériques $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{F}(M) = F(M)\,\overrightarrow{e_r}$$



I.2 Champ de forces centrales conservatives

▮**Propriété :** Un champ de forces du type $\overrightarrow{F}(M) = F(r)\,\overrightarrow{e_r}$, avec $r = OM$ et $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ est un champ de **forces centrales conservatives**.

Alors, $\overrightarrow{F}$ dérive de l'**énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$ telle que $F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{F} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}\,\overrightarrow{e_r}$

Démonstration : On revient à la définition d'une force conservative :

$$\boxed{\overrightarrow{F} \text{ est conservative} \quad \Leftrightarrow \quad \delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p}$$

Comme $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$, on a $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}$, avec $\overrightarrow{e_r} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{e_r}$ — c'est-à-dire $\overrightarrow{e_r}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} = 0$ [1]
Donc, pour une force centrale du type $\overrightarrow{F}(M) = F(r)\,\overrightarrow{e_r}$:

$$\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(M) = F(r)\,\overrightarrow{e_r}\,.\,(\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}) = F(r)\mathrm{d}r$$

Par identification, on en déduit : $\boxed{F(r) = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}}$

I.3 Exemples de forces centrales conservatives :

(1) Force de rappel élastique : un ressort (ou un élastique toujours tendu), de longueur $l = OM = r$, dont une extrémité est fixe en O exerce sur un mobile attaché à son autre extrémité M une force :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{el}} = -k(r - l_0)\,\overrightarrow{e_r}} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,el}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 + \text{Cte} \xrightarrow[\text{avoir } \mathcal{E}_p(l_0)=0]{\text{Cte=0 pour}} \boxed{\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(r-l_0)^2}$$

(2) Force coulombienne : un noyau d'or, de charge $Q = Ze$, placé en O exerce sur un ion hélion, de charge $q = 2e$, localisé en M, une force :

$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q.Q}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q.Q}{r} + \text{Cte} \xrightarrow[\text{avoir } \mathcal{E}_p(\infty)=0]{\text{Cte=0 pour}} \boxed{\mathcal{E}_{p,e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q.Q}{r}}$$

(3) Force gravitationnelle : un astre de symétrie sphérique, de masse m_O, de centre O, de rayon R, exerce sur un point matériel M, de masse m, restant à la distance $r = OM > R$, une force :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g} = -\mathcal{G}\frac{m.m_O}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,g}}{\mathrm{d}r}\overrightarrow{e_r} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,g} = -\mathcal{G}\frac{m.m_O}{r} + \text{Cte} \xrightarrow[\text{avoir } \mathcal{E}_p(\infty)=0]{\text{Cte=0 pour}} \boxed{\mathcal{E}_{p,g} = -\mathcal{G}\frac{m.m_O}{r}}$$

II Propriétés des mouvements à force centrale

II.1 Conservation du moment cinétique

• **Système, référentiel et bilan des forces :** Soit $\mathcal{S} = \{M, m\}$, un point matériel de masse m, étudié dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, soumis à une résultante des forces qui s'assimile à une **force centrale** $\overrightarrow{F} = F(M)\overrightarrow{e_r}$, de centre de force O (O est donc fixe dans $\mathcal{R}$).
• Le **Théorème du Moment Cinétique** appliqué à M :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{\text{Cte}}$$

Propriété 1 : Pour un point matériel subissant seulement une force centrale de centre O, il y a **conservation du moment cinétique évalué en** O : $\boxed{\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{\text{Cte}}}$

Rq1 : Pour connaître ce vecteur constant, il suffit de connaître les conditions initiales $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{v_0})$ du point M :

$$\boxed{\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{\text{Cte}} = \overrightarrow{OM_0} \times m\overrightarrow{v_0}}$$

Rq2 : On peut définir un vecteur $\overrightarrow{C}$ (appelé par certains, « vecteur cinématique ») tel que $\overrightarrow{C} = \dfrac{\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{m} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$.

Ce vecteur est également constant, et fixé par les **C.I.** : $\boxed{\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\text{Cte}'} = \overrightarrow{OM_0} \times \overrightarrow{v_0}}$

1. En effet, pour un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_r}$, on a $\| \overrightarrow{e_r} \|^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{d} \| \overrightarrow{e_r} \|^2 = \mathrm{d}(\overrightarrow{e_r}\,.\,\overrightarrow{e_r}) = \begin{cases} \mathrm{d}1 = 0 \\ 2\overrightarrow{e_r}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} \end{cases}$

II.2 Mouvement plan

II.3 Loi des aires