Leçon M7 – Méthodes

■ Comment établir les formules de Binet ?

Rq : Cette démonstration, purement mathématique, est explicitement hors-programme : « Aucune démarche n'est imposée pour l'établissement de la nature des trajectoire. Aucune méthode (formule de Binet, vecteur excentricité, invariants dynamiques de Lagrange ou Runge-Lenz) ne peut donc être exigée. »... mais cela n'exlut pas un problème de vous guider, par des questions, dans l'utilisation d'une de ces méthodes (➜ Cf Cours **M7.V**, **Ex-M7.3/4**).

• Pour une force centrale newtonienne : $\underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})}{\overrightarrow{OM}} \left| \begin{array}{l} r \\ 0 \end{array}\right. \quad \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})}{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}} \left| \begin{array}{l} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{array}\right. \quad \underset{(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta})}{\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}} \left| \begin{array}{l} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{array}\right.$

$$\text{avec } \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \frac{\overrightarrow{F}}{m} = -\frac{K}{mr^2}\,\overrightarrow{e_r} \xrightarrow[\overrightarrow{e_r} \text{ et } \overrightarrow{e_\theta}]{\text{en projetant selon}} \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 & = -\dfrac{K}{mr^2} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \boxed{C = r^2\dot{\theta} = \text{Cte}}$$

$$\bullet\ r = r[\theta(t)] \ \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \\ \dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = \dfrac{C}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right) \ \Leftrightarrow \ \boxed{\dot{r} = -Cu'_\theta} \\ \text{en posant } \boxed{u(\theta) \equiv \dfrac{1}{r(\theta)}} \text{ et } \boxed{u'_\theta = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}} \end{cases}$$

$$\bullet\ \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d} - Cu'_\theta}{\mathrm{d}\theta}.\dot{\theta} = -\frac{C^2}{r^2}u''_\theta \ \Leftrightarrow \ \boxed{\ddot{r} = -C^2u^2u''_\theta}$$

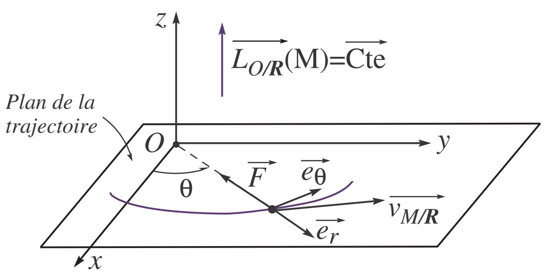
• Les formules de Binet consiste à « éliminer »le temps dans les expressions de v^2 (module de la vitesse au carré) et de $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ (accélération de M) en utilisant la constante des aires C :

$$\begin{cases} v^2 & = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \\ \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} & = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2 = (-Cu'_\theta)^2 + \dfrac{1}{u^2}u^4C^2 \\ a_r = -C^2u^2u''_\theta - \dfrac{1}{u}u^4C^2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} v^2 = C^2(u'^2_\theta + u^2) \\ \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = -C^2u^2(u''_\theta + u)\,\overrightarrow{e_r} \end{array}}$$

■ Comment établir que le vecteur de Runge-Lenz est constant ?

❏ **Méthode 1.—** Montrer qu'un vecteur est une constante du mouvement revient à montrer que sa dérivée temporelle est nulle :

$$\boxed{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{Cte}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}}$$



Pour montrer que le vecteur de Runge-Lenz $\boxed{\overrightarrow{A} = \dfrac{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{K} - \overrightarrow{e_r}}$ est constant pour un mouvement à force centrale newtonienne $\overrightarrow{F} = -\dfrac{K}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$, on exprime :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \frac{1}{K}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \times \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) + \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times \cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}}\right] - \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

avec : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \dfrac{\overrightarrow{F}}{m}$, $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

on obtient : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \dfrac{1}{\cancel{K}}\dfrac{-\cancel{K}}{\cancel{mr^2}}\,\overrightarrow{e_r} \times \cancel{mr^2}\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} - \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = -\dot{\theta}(\underbrace{\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_z}}_{-\overrightarrow{e_\theta}} + \overrightarrow{e_\theta}) = \overrightarrow{0} \ \Leftrightarrow \ \boxed{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{\text{Cte}}}$