M9 – DYNAMIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

« Enfermez-vous avec un ami dans la cabine principale à l'intérieur d'un grand bateau et prenez avec vous des mouches, des papillons, et d'autres petits animaux volants. Prenez une grande cuve d'eau avec un poisson dedans, suspendez une bouteille qui se vide goutte à goutte dans un grand récipient en dessous d'elle. Avec le bateau à l'arrêt, observez soigneusement comment les petits animaux volent à des vitesses égales vers tous les côtés de la cabine. Le poisson nage indifféremment dans toutes les directions, les gouttes tombent dans le récipient en dessous, et si vous lancez quelque chose à votre ami, vous n'avez pas besoin de le lancer plus fort dans une direction que dans une autre, les distances étant égales, et si vous sautez à pieds joints, vous franchissez des distances égales dans toutes les directions. Lorsque vous aurez observé toutes ces choses soigneusement (bien qu'il n'y ait aucun doute que lorsque le bateau est à l'arrêt, les choses doivent se passer ainsi), faites avancer le bateau à l'allure qui vous plaira, pour autant que la vitesse soit uniforme [c'est-à-dire constante] et ne fluctue pas de part et d'autre. Vous ne verrez pas le moindre changement dans aucun des effets mentionnés et même aucun d'eux ne vous permettra de dire si le bateau est en mouvement ou à l'arrêt... »

Galilée – *Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du monde* (1632)

OBJECTIFS

• Après avoir vu l'aspect cinématique du problème des changements de référentiels (➜ Cf Cours **M8**), cette leçon aborde son aspect dynamique.
• En première période, on a vu que la première loi de Newton ou **Principe d'Intertie** entraîne que tous les référentiels ne sont pas équivalents et qu'il existe des référentiels privilégiés : les **référentiels galiléens** (➜ Cf Cours **M2** ; §**I**).
Ces référentiels seront donc les « référentiels absolus » et les **référentiels non galiléens** les référentiels « relatifs » (➜ Cf **M8.I.1)**).
• On va donc commencer par préciser la notion de **relativité galiléenne** (➜ Cf §**I.4)**).
• On pourra alors expliciter l'écriture du principe fondamental de la dynamique (**P.F.D.**), du théorème du moment cinétique (**T.M.C.**) et de l'énergie cinétique (**Th.**$\mathcal{E}_k$) pour un point matériel en référentiel non galiléen (➜ Cf **II**).

I Référentiels Galiléens

I.1 Définition de principe :

◇ **Définition :** (à partir de la 1^e loi de Newton) Un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel un point matériel isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

→ Mais on n'a jamais rencontré un système isolé !
...au mieux, pouvons-nous réaliser un système pseudo-isolé et alors constater que dans certains référentiels, cela conduit à une vitesse constante (du centre de masse G).
Ce qui est vérifié dès lors que $m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}}$ s'écrit : $m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

I.2 Définition pratique/expérimentale :

◇ **Définition :** (à partir de la 2^e loi de Newton)
Un référentiel $\mathcal{R}_g$ est galiléen si l'application du **P.F.D.** appliqué à un point M de masse m :

$$m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F}$$

permet de prévoir une évolution confirmée par l'expérience.

I.3 Propriété de tous les référentiels galiléens

• Soit M (pseudo-) isolé. Supposons qu'on l'étudie dans 2 référentiels galiléens $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$.

Alors le **P.F.D.** donne, dans $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$: $\begin{cases} m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} &= \overrightarrow{0} \\ m\,\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}'_g}} &= \overrightarrow{0} \end{cases}$

Or, nous avons vu dans la leçon précédente (➜ Cf Cours **M8.IV**) que :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}'_g}} + \overrightarrow{a_e}(M) + 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}'_g}}$$

D'où, pour tout point M pseudo-isolé : $\overrightarrow{a_e}(M) + 2\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}'_g}} = \overrightarrow{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'_g/\mathcal{R}_g} &= \overrightarrow{0} & : \mathcal{R}'_g \text{ et } \mathcal{R}_g \text{ sont en translation l'un par rapport à l'autre.} \\ \overrightarrow{a_e}(M) &= \overrightarrow{0} & : \ldots\text{et cette translation doit être rectiligne uniforme.} \end{cases}$$

▌Propriété :

• **Tous** les référentiels galiléens sont en **translation rectiligne uniforme** les uns par rapport aux autres ; et donc par rapport à l'un d'entre eux.

• *Dit autrement :* **Si** un référentiel galiléen est connu, **tous** les autres s'en déduisent par translations rectilignes uniformes.

I.4 Principe de relativité de Galilée

Ce principe est une conséquence de la propriété précédente. Soit un point M soumis à $\overrightarrow{F}$ dans $\mathcal{R}_g$ et à $\overrightarrow{F'}$ dans $\mathcal{R}'_g$. Par application du **P.F.D.** dans $\mathcal{R}_g$ et dans $\mathcal{R}'_g$, on obtient :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F} \quad \text{et} \quad m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}'_g}} = \overrightarrow{F'}$$

Comme $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}'_g$ sont en translation l'un par rapport à l'autre : $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}'_g}} \Leftrightarrow \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F'}$

▌Propriété :

• Les forces issues des interactions fondamentales sont les mêmes **dans tous** les référentiels **galiléens**.

• *Dit autrement :* Si M est soumis à $\overrightarrow{F}$ dans un référentiel **galiléen** $\mathcal{R}_g$, alors il est soumis à $\boxed{\overrightarrow{F'} = \overrightarrow{F}}$ dans tout autre référentiel galiléen $\mathcal{R}'_g$.

• *Dit autrement :* **Les lois de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel galiléen.**

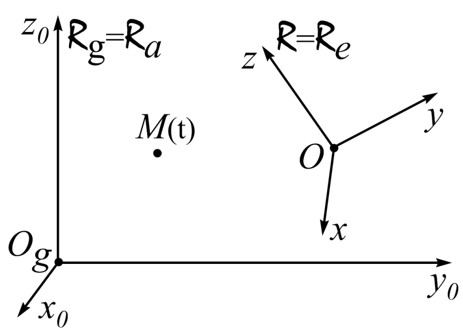
Csqce : Il est impossible de distinguer un référentiel galiléen d'un autre à l'aide des lois de la physique.

II P.F.D. et Théorèmes dans un référentiel non galiléen

II.1 Principe fondamental de la dynamique

• Dans un référentiel galiléen, le **P.F.D.** pour $\mathcal{S} = \{M, m\}$ s'écrit :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F}$$



• Soit $\mathcal{R}$ un référentiel **non** galiléen : il possède un mouvement d'entraînement par rapport à $\mathcal{R}_g$ qui conduit à la loi de composition des accélération : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_C}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{a_e}(M) + \overrightarrow{a_C}(M)$$

• Dès lors, le **P.F.D.** dans $\mathcal{R}_g$ peut encore s'écrire sous la forme :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \overrightarrow{F} \quad \Leftrightarrow \quad m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} + m\overrightarrow{a_e}(M) + m\overrightarrow{a_C}(M) = \overrightarrow{F}$$

• On peut donc étudier le mouvement de $\mathcal{S} = \{M, m\}$ dans $\mathcal{R}$ et lui associer une relation fondamentale de la dynamique adaptée à la nature non galiléenne de $\mathcal{R}$ en écrivant :

$$m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a_e}(M) - m\overrightarrow{a_C}(M)$$

◊ **Définition :** On définit les **pseudo-forces** ou **forces d'inertie** deux termes homogènes à une force « vraie » :

- la **force d'inertie d'entraînement** : $\overrightarrow{F_{ie}} = -m.\overrightarrow{a_e}(M)$

- la **force d'inertie de Coriolis** : $\overrightarrow{F_C} = -m.\overrightarrow{a_C}(M)$

❏ **Méthode 1.— Comment exprime-t-on la force d'inertie d'entraînement ?**
On revient à la propriété de l'accélération d'inertie d'entraînement comme accélération du point coïncidant :

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m.\overrightarrow{a_e}(M) = -m.\overrightarrow{a_{M^*/\mathcal{R}_g}}$$

où M^* est le **point coïncidant** associé à M étudié dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire :
- le point qui est **fixe** dans $\mathcal{R}$, le **référentiel relatif** (ici, non galiléen)
- qui coïncide avec M...
- ... à l'instant t

❏ **Méthode 2.— Comment exprime-t-on la force d'inertie de Coriolis ?**
On revient à la définition de l'accélération (d'inertie) de Coriolis :

$$\overrightarrow{F_C} = -m.\overrightarrow{a_C}(M) = -2m.\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

où :
- $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g}$ est le **vecteur rotation** du référentiel non galiléen $\mathcal{R}$ par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$
- $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ est la vitesse du point M dans le **référentiel relatif** (ici, non galiléen).

▮**P.F.D. dans un référentiel non galiléen :** Pour un point matériel M, de masse m, étudié dans un référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen (relativement à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$), la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m.\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_C} \quad \text{avec :} \begin{cases} \overrightarrow{F} = \sum_i \overrightarrow{F}_{i\to M} & \text{la résultante des \textbf{forces « vraies »}} \\ \overrightarrow{F_{ie}} = -m.\overrightarrow{a_e}(M) & \text{la \textbf{force d'inertie d'entraînement}} \\ \overrightarrow{F_C} = -m.\overrightarrow{a_C}(M) & \text{la \textbf{force de d'inertie de Coriolis}} \end{cases}$$

II.2 Théorème de l'énergie cinétique

Méthode : On multiplie scalairement par $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ chaque membre du **P.F.D.** appliqué à $\{M, m\}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ non galiléen :

$$m.\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{F_C} \longrightarrow m\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} . \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{F} . \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{F_{ie}} . \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{F_C} . \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$$

On reconnaît la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique de M dans $\mathcal{R}$, la puissance de la résultante des forces « vraies »ainsi que celle des forces d'inertie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2_{M/\mathcal{R}}\right) = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C})$$

Comme $\overrightarrow{F_C} = -2m.\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_g} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$ est par propriété du produit vectoriel un vecteur toujours orthogonal au vecteur vitesse relative $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, on en déduit que $\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C}\,.\,\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 0$ à chaque instant.

Propriété de la force de Coriolis :
• La force d'inertie de Coriolis étant toujours othogonale à la vitesse, sa puissance est nulle. On dit que **« la force de Coriolis ne travaille pas »**.

$$\boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C}\,.\,\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = 0} \xrightarrow{\mathcal{P} = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}} \boxed{\delta W(\overrightarrow{F_C}) = \overrightarrow{F_C}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0}$$

• *Dit autrement :* la force de Coriolis ne participe jamais à l'augmentation ou à la diminution de vitesse du point M dans $\mathcal{R}$.

Théorème de la Puissance cinétique dans un référentiel non galiléen : La dérivée temporelle de l'énergie cinétique évaluée dans $\mathcal{R}$ est égale à la puissance des forces qui travaillent dans $\mathcal{R}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) + \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}})} \quad \text{avec} \begin{cases} \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F}) & \text{puissance des forces « vraies »} \\ \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\overrightarrow{F_{ie}}) & \text{puissance de la force d'inertie d'entraînement} \end{cases}$$

En multipliant chaque terme par dt, on en déduit le théorème de l'énergie cinétique dans $\mathcal{R}$.

Théorème de l'Énergie cinétique dans un référentiel non galiléen : Deux expressions selon qu'on s'intéresse à un déplacement élémentaire de M (pendant une durée élémentaire dt) ou à un déplacement fini entre M_1 et M_2 (pendant une durée finie $\Delta t = t_2 - t_1$) :

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} = \delta W(\overrightarrow{F}) + \delta W(\overrightarrow{F_{ie}})} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta\mathcal{E}_{k/\mathcal{R},M_1\to M_2} = W(\overrightarrow{F}) + W(\overrightarrow{F_{ie}})}$$

avec

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} & \text{variation élémentaire de l'énergie cinétique de } M \text{ entre } t \text{ et } t+\mathrm{d}t \\ \delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} & \text{travail élem. des forces « vraies » fourni à } M \text{ pendant la durée } \mathrm{d}t \\ \delta W(\overrightarrow{F_{ie}}) = \overrightarrow{F_{ie}}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} & \text{t. élem. de la force d'inertie d'entraînement fourni à } M \text{ pendant } \mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_k(M_2) - \mathcal{E}_k(M_1) & \text{variation de l'énergie cinétique de } M \text{ entre les points } M_1 \text{ et } M_2 \\ W(\overrightarrow{F}) = \displaystyle\int_{M_1}^{M_2} \delta W(\overrightarrow{F}) & \text{travail des forces « vraies » fourni à } M \text{ pendant la durée } \Delta t \\ W(\overrightarrow{F_{ie}}) = \displaystyle\int_{M_1}^{M_2} \delta W(\overrightarrow{F_{ie}}) & \text{t. de la force d'inertie d'entraînement fourni à } M \text{ pendant } \Delta t \end{cases}$$

II.3 Théorème de l'énergie mécanique

Si certaines forces (qu'elles soient « vraie » ou d'inertie d'entraînement) sont **conservatives**, alors leur travail, indépendant du chemin suivi par M, s'exprime en fonction de l'énergie potentielle : $\delta W_C = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, et le **Th.**$\mathcal{E}_k$ devient, en distinguant les forces non plus en terme forces/pseudo-forces mais en terme de forces conservatives/non conservatives :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} = \delta W(\overrightarrow{F}) + \delta W(\overrightarrow{F_{ie}}) = \delta W_C + \delta W_{NC} = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p + \delta W_{NC}$$

▌Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen : il s'exprime de la même manière que dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \delta W_{NC}} \text{ avec } \boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p} \text{, où } \boxed{\mathcal{E}_p = \sum_i \mathcal{E}_{p_i}}$$

est la somme de toutes les formes d'énergies potentielles, qu'elles correspondent à des forces « vraies » *conservatives* ou bien à une force d'inertie d'entraînement *conservative*.

Cas particulier : POur un **système conservatif**, c'est-à-dire **si** *toutes* les forces sont conservatives ou bien ne travaillent pas (comme $\overrightarrow{F_C}$), on peut écrire : $\delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p0}$ et $\delta W(\overrightarrow{F_{ie}}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_{ie}}$. Le **Th.**$\mathcal{E}_m$ s'écrit alors :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_m = \mathsf{Cte} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_{p0} + \mathcal{E}_{p_{ie}} = \mathsf{Cte}$$

De plus, **si le système est unidimensionnel** (ne dépendant, par exemple, que de la variable x), les positions d'équilibre et leurs natures s'obtiennent en étudiant les dérivées d'ordre 1 et d'ordre 2 de $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p0} + \mathcal{E}_{p_{ie}}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right)_{(x_e)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_e \text{ est une position d'équilibre}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{(x_e)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_e \text{ est une position d'équilibre stable}$$

II.4 Théorème du moment cinétique

Méthode : pour établir le théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen, on dérive par rapport au temps le moment cinétique de M, évalué en O, dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$.

- Ainsi, à partir de $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}$, on établit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{OM} \times m\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}}$$

- Dans le cas le plus général : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} - \overrightarrow{v_{O/\mathcal{R}}}$
- **Hyp :** On se place dans le cas particulier où O **est fixe dans** $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \cancel{\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} \times m\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}}} + \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_{ie}} + \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_C}$$

▌Théorème du moment cinétique dans un référentiel non galiléen : La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M, évalué en O, dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}$, est égale à la somme des moment en O des forces, en tenant compte des forces d'inertie :

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_C})} \text{ avec } \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F_i}$$

II.5 Conclusion

L'ensemble des résultats de la mécanique newtonienne du point matériel peut être utilisé dans un référentiel $\mathcal{R}$ quelconque, **à condition** d'ajouter les effets des forces d'inertie (ou pseudo-forces) à ceux des forces « vraies » (issues des interactions fondamentales entre particules / de la présence des autres corps matériels)