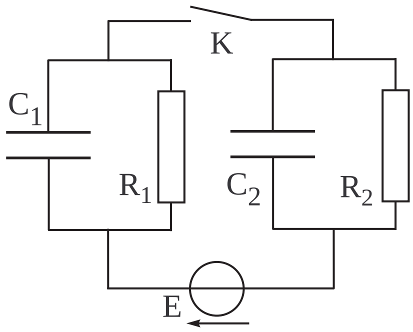
TD d'Électrocinétique : Régimes transitoires

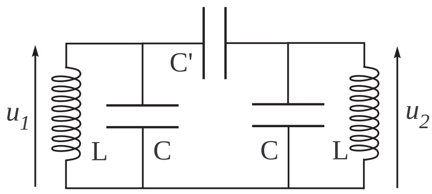
Ex-TD/E4.1 **Deux circuits « *RC* parallèle » en série**



On étudie le circuit suivant.
À $t = 0$, on ferme K, les deux condensateurs étant initialement déchargés.
→ Déterminer l'expression de $q_1(t)$, la charge du condensateur de capacité C_1.
On posera $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{C_1 + C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$,

$$\tau_1 = R_1 C_1 \text{ et } I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Ex-TD/E4.2 **Couplage de deux circuits L//C**

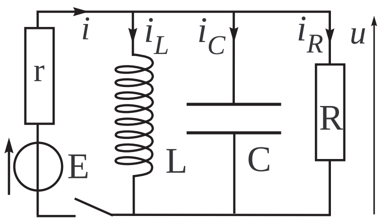


On considère les deux circuits oscillants (LC) identiques couplés par un condensateur de capacité C'. Lorsqu'on ferme l'interrupteur à $t = 0$ il n'y a aucun courant dans le circuit.

1) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
2) Établir les équations différentielle vérifiées par $u = u_1 + u_2$ et $v = u_2 - u_1$.
3) Quelles conditions initiales de charge des condensateurs permettent d'obtenir des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ non nulles ?

DM n^{o}3 : Circuit RLC parallèle

Réponse à un échelon de tension



Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.
Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.

1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_L, i_C et i_R dans les quatre branches :
- **a)** juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),
- **b)** au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t.

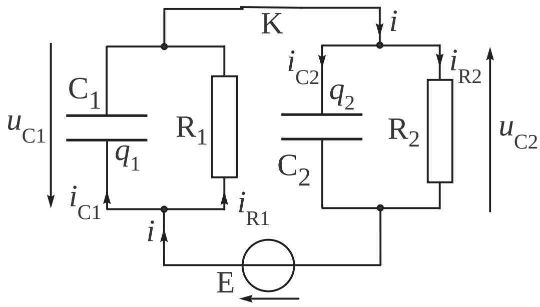
Solution Ex-TD/E4.1

• Loi des nœuds : $i = i_{R1} + i_{C1} = \dfrac{u_{R1}}{R_1} + \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$

Et comme $u_{R1} = u_{C1} = \dfrac{q_1}{C_1} \longrightarrow \boxed{i = \dfrac{q_1}{R_1C_1} + \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}}$ ①

• De même, comme $u_{R2} = u_{C2} = \dfrac{q_2}{C_2}$

$\longrightarrow \boxed{i = \dfrac{q_2}{R_2C_2} + \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}}$ ②



• Loi des mailles : $E - u_{C1} - u_{C2} = 0$

$\hookrightarrow \boxed{q_2 = C_2E - \dfrac{C_2}{C_1}q_1}$ ③

• ② $\xrightarrow{③}$ $i = \dfrac{1}{R_2C_2}\left(C_2E - \dfrac{C_2}{C_1}q_1\right) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_2E - \dfrac{C_2}{C_1}q_1\right)$

$\hookrightarrow \boxed{i = \dfrac{E}{R_2} - \dfrac{q_1}{R_2C_1} - \dfrac{C_2}{C_1}\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}}$ ④

• ① $\xrightarrow{④}$ $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C_1+C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)q_1 = \dfrac{C_1E}{R_2(C_1+C_2)}}$

En posant $\dfrac{1}{\tau} \equiv \dfrac{1}{C_1+C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) \Leftrightarrow \tau = \dfrac{1}{C_1+C_2}\dfrac{R_1+R_2}{R_2R_1}$,

et en remarquant qu'alors $\dfrac{1}{R_2(C_1+C_2)} = \dfrac{R_1}{\tau(R_1+R_2)}$

on obtient : $\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q_1}{\tau} = \dfrac{R_1C_1}{\tau}\dfrac{E}{R_1+R_2}$,

soit, avec $\tau_1 = R_1C_1$ et $I_0 = \dfrac{E}{R_1+R_2}$: $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q_1}{\tau} = \dfrac{\tau_1}{\tau}I_0}$ ⑤

• La solution de cette équation différentielle est de la forme : $q(t) = q_G(t) + q_P$

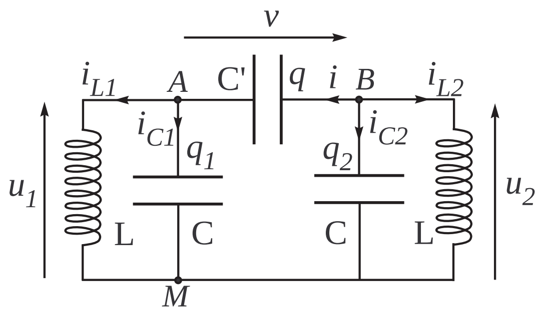
- où $q_G(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ est la solution générale de l'équation homogène
- et où $q_P = \tau_1 I_0$ est une solution particulière de l'équation de second membre constant.

Ainsi : $q_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \tau_1 I_0$

• Pour déterminer la constante d'intégration A, on a besoin d'une condition initiale. Or, **comme la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a

$A + \tau_1 I_0 = q_1(0^+) = q_1(0^-) = 0$, soit $\boxed{A = -\tau_1 I_0}$ et $\boxed{q_1(t) = \tau_1 I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

Solution Ex-TD/E4.2



1) • Comme $u_1 = L\dfrac{\mathrm{d}i_{L1}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q_1}{C}$ et $i_{C_1} = \dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}$,
la loi des nœuds $i = i_{L1} + i_{C1}$ conduit à :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u_1}{L} + C\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2}} \quad ①$$

• De même comme $u_2 = L\dfrac{\mathrm{d}i_{L2}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{q_2}{C}$ et $i_{C_2} = \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}$,
la loi des nœuds $-i = i_{L2} + i_{C2}$ conduit à : $\boxed{-\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u_2}{L} + C\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}}$ ②

• Loi des mailles : $u_1 + v + u_2 = 0$, soit : $\boxed{v = u_2 - u_1}$ ③

• $\boxed{i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C'\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$ ④ et donc : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}}$.

• ① $\xrightarrow{④}$ $\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u_1}{LC} = \dfrac{C'}{C}\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$ $\xrightarrow{③}$ $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{L(C+C')}u_1 = \dfrac{C'}{C+C'}\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}}$ ⑤

• ② $\xrightarrow{④}$ $\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u_2}{LC} = -\dfrac{C'}{C}\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2}$ $\xrightarrow{③}$ $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{L(C+C')}u_2 = \dfrac{C'}{C+C'}\dfrac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2}}$ ⑥

2) • ⑤+⑥ $\rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u}{L(C+C')} = \dfrac{C'}{C+C'}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{u}{LC} = 0}$ $(\star)$

• ⑥ − ⑤ $\rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{v}{L(C+C')} = -\dfrac{C'}{C+C'}\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{v}{L(C+2C')} = 0}$ $(\star\star)$

3) Il faut que les condensateurs soient initialement chargés.