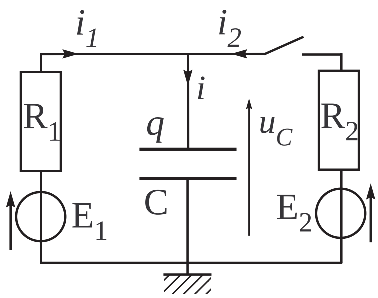
TD d'Électrocinétique : Régimes transitoires (2)

Ex-TD/E4.3 **Étude d'un circuit RC avec deux sources**



À $t < 0$, le circuit ci-contre a atteint son régime permanent.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1) Sans résoudre d'équation différentielle, déterminer les comportements asymptotiques suivants :

a) $i(0^-)$, $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$ et $u_C(0^-)$ à l'instant $t = 0^-$.

b) $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$.

c) $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $u_C(\infty)$ à l'instant $t = \infty$.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.
$\rightarrow$ En déduire $u_C(t)$. On posera $\tau = \dfrac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}$.

3) Sans calcul supplémentaire, donner les expressions de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.

Solution Ex-TD/E4.3

1.a) • L'interrupteur ouvert impose $\boxed{i_2(0^-) = 0}$.

• La loi des nœuds conduit à $i(0^-) = i_1(0^-)$.

• **Le régime continu étant établi** depuis suffisamment longtemps pour $t < 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. D'où : $\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = 0}$.

• Le condensateur ayant été chargé sous la tension continue E_1, on en déduit que $\boxed{u_C(0^-) = E_1}$.
(Une simple loi des mailles donne le même résultat).

1.b) • Comme **la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_1}$$

• La **loi des mailles** dans la première branche ($E_1 - R_1 i_1(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à :

$$\boxed{i_1(0^+) = 0}$$

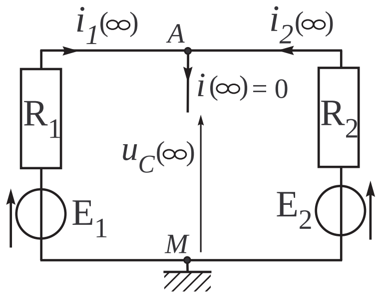
• La **loi des mailles** dans la seconde branche ($E_2 - R_2 i_2(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à :

$$\boxed{i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}}$$

• La **loi des nœuds** conduit à :

$$\boxed{i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}}$$

1.c) • Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est à nouveau en régime permanent continu : il se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $\boxed{i(\infty) = 0}$. On obtient le schéma équivalent ci-contre pour décrire le comportement asymptotique du circuit.



• La loi de Pouillet donne immédiatement :

$$\boxed{i_1(\infty) = -i_2(\infty) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}$$

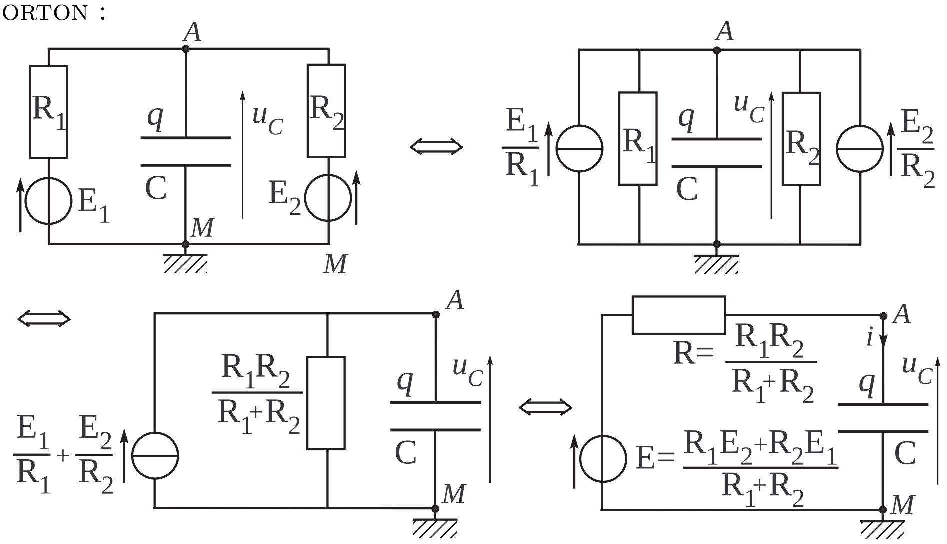
• Et la loi des nœuds en termes de potentiels au point A donne :

$$\frac{V_M - V_A + E_1}{R_1} + \frac{V_M - V_A + E_2}{R_2} + 0 = 0$$

Soit :

$$\boxed{u_C(\infty) = V_A - V_M = \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$$

2) On simplifie le circuit par une série de transformations générateur de Thévenin / générateur de Norton :



• La loi des mailles dans le circuit équivalent final donne :

$$E - Ri - u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \quad (\star)$$

en posant $\boxed{E = \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$ et $\boxed{R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$.

• La solution de $(\star)$ est de la forme $u_C(t) = u_G(t) + u_P$, somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène ($u_G(t)$) et d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (u_P).
• Ce second étant constant, on cherche une solution u_P constante :

$$\boxed{u_P = E}$$

• Ainsi :

$$\boxed{u_C(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)} \quad ①$$

• La constante d'intégration se trouve grâce aux conditions initiales :

$$u_C(0^+) = E_1 = A + E \;\Rightarrow\; \boxed{A = \frac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2} = u_C(0^+) - u_C(\infty)} \text{ ②}$$

D'où :

$$\boxed{u_C(t) = \frac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 + R_2}}$$

3) Grâce à ① et ② :

$$\boxed{u_C(t) = (u_C(0^+) - u_C(\infty)) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$$

Or, toutes les grandeurs électriques de ce circuit d'ordre 1 évoluent de la même manière, c'est-à-dire suivant la loi temporelle :

$$x(t) = (x(0^+) - x(\infty)) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + x(\infty)$$

Grâce à la question **1)** , on trouve :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$