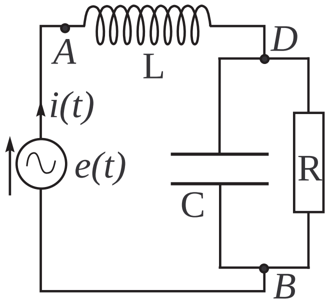
TD d'Électrocinétique
Régimes sinusoïdal

Ex-TD/E5.1 **Association L/RC parallèle** (d'après ENAC 2004)



Le dipôle AB représenté sur le schéma ci-contre est alimenté par une source de tension parfaite de force électromotrice $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$.

1) Exprimer L en focntion de R, C et ω pour que le dipôle AB soit équivalent à une résistance pure R_{eq}.

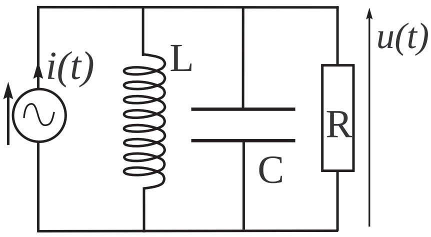
2) Calculer L sachant que $R = 100\ \Omega$, $C = \dfrac{100}{3}\mu F$ et $\omega = 400\ rad.s^{-1}$.

3) L'amplitude de la force électromotrice du générateur vaut $E_0 = 180\ V$.
Calculer l'amplitude de l'intensité du courant I dans la bobine.

4) calculer les amplitudes des différences de potentiel U_{AD} et U_{DB}.

5) Calculer les amplitudes des intensités des courants I_R et I_C circulant respectivement dans la résistance et dans le condensateur.

Ex-TD/E5.2 **Facteur de qualité d'un circuit RLC parallèle** (d'après Morellet/Grossart, p. 221/235)



Le circuit représenté est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension $u(t)$ aux bornes du circuit en fonction des données du problème.

2) Montrer que l'amplitude U_m de $u(t)$ passe par un maximum pour une valeur ω_0 de la pulsation à déterminer.

3) Tracer la courbe donnant les variations de U_m en fonction de ω. Préciser la largeur $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ de la courbe de réponse, où ω_1 et ω_2 sont les pulsations telles que $U_m = \dfrac{U_m(max)}{\sqrt{2}}$.

4) Exprimer en fonction de R, L et C le facteur de qualité Q du circuit, défini par $\dfrac{1}{Q} = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

5) Exprimer la puissance électrique moyenne $\mathcal{P}$ fournie par la source de courant.

6) Montrer que la puissance $\mathcal{P}$ passe par un maximum pour une pulsation à déterminer.

7) On pose $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. Exprimer la puissance $\mathcal{P}$ sous la forme : $\mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{P}_{max}}{1 + A(x - \frac{1}{x})^2}$ en donnant les expressions de $\mathcal{P}_{max}$ et de A.

8) Déterminer la largeur relative $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$ de l'intervalle de pulsations $\Delta\omega$ telles que $\mathcal{P} > \dfrac{\mathcal{P}_{max}}{2}$.

Solution Ex-TD/E5.1

1) $\boxed{\underline{Z}_{DB} = \dfrac{R\dfrac{1}{jC\omega}}{R + \dfrac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1+RC\omega}}$ $(\star)$

$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{AD} + \underline{Z}_{DB} = jL\omega + \dfrac{R}{1+RC\omega} = \dfrac{R(1-LC\omega^2)+jL\omega}{1+jRC\omega}$

$\underline{Z}_{AB} = \dfrac{R + j(L\omega - R^2C\omega(1-LC\omega^2))}{1+R^2C^2\omega^2} = R_{eq} \Leftrightarrow L\omega - R^2C\omega(1-LC\omega^2) = 0$

$\hookrightarrow$ $\boxed{L = \dfrac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}}$ Alors : $\underline{Z}_A = \boxed{R_{eq} = \dfrac{R}{1+R^2C^2\omega^2} = \dfrac{L}{RC}}$.

2) $\boxed{L = 120\ mH}$.

3) $\underline{E} = \underline{Z}_{AB}\underline{I} = R_{eq}\underline{I} \Rightarrow \boxed{I_0 = \dfrac{E_0}{R_{eq}} = \dfrac{RC}{L}E = 5\ A}$

4) • $\underline{U}_{AD} = jL\omega\underline{I} \Rightarrow \boxed{U_{AD} = L\omega I_0 = 240\ V}$

• D'après $(\star)$: $\underline{U}_{DB} = \underline{Z}_{DB}\underline{I} = \dfrac{R}{1+RC\omega}\underline{I} \Rightarrow \boxed{U_{DB} = \dfrac{R}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}I_0 = 300\ V}$

> **Rq : Attention !** On rappelle que la loi d'additivité des tensions (loi des mailles) est valable, en régime sinusoïdal, pour les tensions réelles ($e(t) = u_{AD}(t) + u_DB(t)$) ou en amplitudes complexes ($\underline{E} = \underline{U}_{AD} + \underline{U}_{DB}$).
> **Par contre**, comme on le vérifie ici, la loi d'additivité des tensions **ne s'applique pas pour les amplitudes** (réelles) : $E_0 \neq U_{AD} + U_{DB}$.

5) La tension $\underline{U}_{DB}$ est reliée aux intensités $\underline{I}_C$ et $\underline{I}_R$:
$\underline{U}_{DB} = \dfrac{1}{jC\omega}\underline{I}_C$ et $\underline{U}_{DB} = R\underline{I}_R$.

On en déduit : $\boxed{I_C = C\omega U_{DB} = 4\ A}$ et $\boxed{I_R = \dfrac{U_{DB}}{R} = 3\ A}$

> **Rq : Attention !** Notez bien que la loi des nœuds est vérifiée pour les courants réels ($i(t) = i_R(t) + i_C(t)$) et en amplitude complexes ($\underline{I}(t) = \underline{I}_R(t) + \underline{I}_C(t)$) mais **elle ne s'applique pas pour les amplitudes** (réelles) : $I \neq I_C + I_R$.

Solution Ex-TD.2

1) En notation complexe, on a $\underline{I} = \underline{YU}$ en introduisant l'impédance du dipôle RLC parallèle :
$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L = \dfrac{1}{R} + j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)$.

D'où : $\boxed{\underline{U} = \dfrac{\underline{I}}{\dfrac{1}{R} + j\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}}$

2) $U_m = |\underline{U}| = \dfrac{I_0}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}$, fonction qui est maximale lorsque $\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)^2$ est minimal, soit pour $\boxed{\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

3) • On constate que $\lim\limits_{\omega\to 0} U_m(\omega) = \lim\limits_{\omega\to\infty} U_m(\omega) = 0$.

• Pour $\omega = \omega_0$, $\boxed{U_m = U_m(max) = RI}$.

• Les pulsations de coupures ω_1 et ω_2 vérifient :

$$\frac{I}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}=\frac{RI}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2=\frac{2}{R^2}\Leftrightarrow C\omega-\frac{1}{L\omega}=\pm\frac{1}{R}$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont donc les racines positives des équations du second degré :
$LC\omega^2\pm\frac{L}{R}\omega-1=0$ ①/②

Le discriminant de ①/② est $\Delta=\frac{L^2}{R^2}+4LC=\frac{L^2}{R^2}\left(1+4R^2\frac{C}{L}\right)$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\omega_2=\frac{\frac{L}{R}+\sqrt{\Delta}}{2LC}=\frac{1}{2RC}\left(1+\sqrt{1+4R^2\frac{C}{L}}\right)}$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\omega_1=\frac{-\frac{L}{R}+\sqrt{\Delta}}{2LC}=\frac{1}{2RC}\left(-1+\sqrt{1+4R^2\frac{C}{L}}\right)}$

4) La largeur de la bande passante est donc : $\boxed{\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=\frac{1}{RC}}$,

d'où un facteur de qualité $\boxed{Q=\frac{\omega_0}{\Delta\omega}=RC\omega_0=R\sqrt{\frac{C}{L}}}$

5) La puissance électrique moyenne $\mathcal{P}$ consommée par une admittance $\underline{Y}$ s'écrit (en introduisant φ le déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$) :
$\mathcal{P}=\frac{U_mI_0}{2}\cos\varphi=\frac{1}{2}\mathcal{R}e(\underline{Y})U_m^2$.

• D'après la question **1)** et l'expression de $\underline{Y}$ (qui donne $\mathcal{R}e(\underline{Y})=\frac{1}{R}$),
comme $U_m=\frac{I_0}{Y}$ on obtient : $\mathcal{P}=\frac{1}{2R}\frac{I_0^2}{\frac{1}{R^2}+\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\mathcal{P}=\frac{1}{2}\frac{RI_0^2}{1+R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}=\frac{\mathcal{P}_{max}}{1+R^2\left(C\omega-\frac{1}{L\omega}\right)^2}}$

en posant $\boxed{\mathcal{P}_{max}=\frac{1}{2}RI_0^2=RI_{eff}^2}$.

6) • $\mathcal{P}=\mathcal{P}_{max}\Leftrightarrow C\omega-\frac{1}{L\omega}=0\Leftrightarrow$ $\boxed{\omega=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}}$

7) Comme $\omega=x\omega_0=x\sqrt{\frac{1}{LC}}$:

$\mathcal{P}=\frac{\mathcal{P}_{max}}{1+R^2\frac{C}{L}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{P}=\frac{\mathcal{P}_{max}}{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$

8) d'après **7)** , $\mathcal{P}=\frac{\mathcal{P}_{max}}{2}\Leftrightarrow 1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=2\Leftrightarrow$ $\boxed{x^2\mp\frac{x}{Q}-1=0}$

Après calculs (si on ne se rend pas compte qu'on a affaire aux mêmes polynômes), on retrouve la bande passante calculée en **4)** , d'où : $\boxed{\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_0}=\frac{1}{Q}}$.