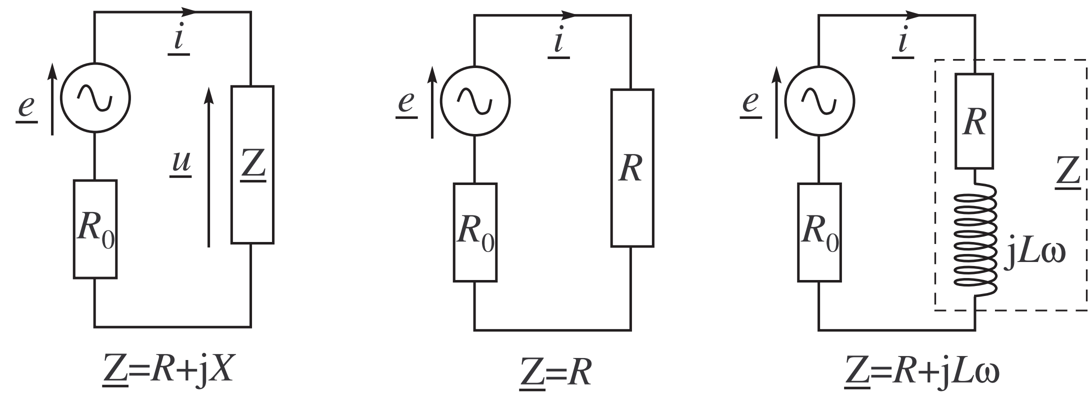
TD d'Électrocinétique
Puissance en régime sinusoïdal (2)

Ex-TD/E5.4 **Bilan de puissance** (d'après G2E 2004 + Dervieux/Simon [Ellipses])
Un générateur de tension de force électromotrice $e(t) = E_0\sqrt{2}\sin(\omega t)$ et de résistance interne R_0 alimente une impédance $\underline{Z}$ de résistance R et de réactance X.

1) Exprimer l'intensité efficace I_0 qui traverse cette impédance en fonction de E_0, R_0, R et X.
2) Exprimer $\mathcal{P}$ la puissance moyenne reçue par l'impédance en fonction de R et I_0.
Faut-il en déduire que $\mathcal{P}$ est indépendante de X ?
3) On suppose que l'impédance est un résistor de résistance R (donc $X = 0$).
Montrer que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(R)$ passe par un maximum.
Calculer la valeur R_m correspondante à ce maximum ainsi que la puissance dissipée correspondante. On donne : $E_0 = 220\ V$; $R_0 = 10\ \Omega$ et $\omega = 314\ rad.s^{-1}$.
4) On insère dans le circuit précédent une bobine idéale d'inductance $L = 0,1\ H$. Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}'(R)$ dissipée dans le résistor.
Montrer que quelque soit R, le rapport $\dfrac{\mathcal{P}'(R)}{\mathcal{P}(R)}$ est inférieur à 1.
Calculer la valeur R'_m pour laquelle $\mathcal{P}'(R)$ est maximale.

Solution Ex-TD/E5.4



• L'intensité est de la forme $i(t) = I_0\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$ en introduisant I_0 l'intensité efficace et φ_i la phase à l'origine des temps de $i(t)$ (qui est aussi le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$).
Appelons $u = U_0\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$ la tension aux bornes de l'impédance $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$.
• En notation complexe :
$\underline{e} = \underline{E}\,e^{j\omega t}$, avec $\underline{E} = E_0\sqrt{2}$
$\underline{u} = \underline{U}\,e^{j\omega t}$, avec $\underline{U} = U_0\sqrt{2}\,e^{j\varphi_u}$ et $\underline{i} = \underline{I}\,e^{j\omega t}$, avec $\underline{I} = I_0\sqrt{2}\,e^{j\varphi_i}$
• Pour un dipôle de résistance R et de réactance X, étudié **en convention récepteur**, soumis à la tension $u(t)$ d'amplitude complexe $\underline{U}$ et parcouru par l'intensité $i(t)$ d'amplitude complexe $\underline{I}$, on a :
$\underline{Z} = R + jX = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U_0}{I_0}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Ze^{j\varphi}$,
avec $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \dfrac{U_m}{I_m} = \dfrac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$.

1) La loi des mailles donne $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}} = \frac{E}{R_0 + R + jX}$, soit $\boxed{I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R+R_0)^2 + X^2}}}$

2)

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \equiv < u(t)i(t) > &= \frac{1}{T}\int_0^T 2U_0 I_0 \sin(\omega t + \varphi_u)\sin(\omega t + \varphi_i)\mathrm{d}t \\ &= 2U_0 I_0 < \frac{1}{2}(\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)) >= U_0 I_0 \cos\varphi\end{aligned}$$

Or, $\cos\varphi = \frac{\mathcal{R}_e(\underline{Z})}{Z} = \frac{R}{Z}$ d'où, comme $U_0 = ZI_0$: $\boxed{\mathcal{P} = RI_0^2 = \frac{RE_0^2}{(R+R_0)^2 + X^2}}$.

D'après la question **1)**, on remarque que $\mathcal{P}$ dépend non seulement de R mais aussi de X (par l'intermédiaire de l'intensité efficace qui dépend aussi à la fois de R et de X).

3) Lorsque $X = 0$, on obtient : $\mathcal{P}(R) = RI_0^2 = \frac{RE_0^2}{(R+R_0)^2}$.

La puissance est maximale si : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = 0$.

Or : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}}{\mathrm{d}R} = \frac{E_0^2}{(R+R_0)^2} - \frac{2RE_0^2}{(R+R_0)^3} = \frac{(R_0 - R)E^2}{(R+R_0)^3}$ qui s'annule pour $R = R_m = R_0$.

La puissance fournie au dipôle par le générateur est maximale lorsque $\boxed{R = R_m = R_0 = 10\ \Omega}$.

Alors : $\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}(max) = \frac{E_0^2}{4R_0} = 1\,210\ W}$.

4) L'expression littérale de la puissance reste la même ($\mathcal{P}' = RI_0^2$) mais l'expression de l'intensité efficace est différente : $I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2}}$.

La puissance dissipée dans le résistor est donc : $\mathcal{P}' = \frac{RE_0^2}{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2}$.

On a donc : $\boxed{\frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{(R+R_0)^2}{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2} < 1}$

• Sur l'intervalle $R \in [0, +\infty[$, on a $\mathcal{P}' > 0$, $\mathcal{P}'(0) = 0$ et $\mathcal{P}'(R \to \infty) = 0$:
↪ donc la puissance $\mathcal{P}'$ passe par un maximum pour $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}'}{\mathrm{d}R}(R'_m) = 0$. Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}'}{\mathrm{d}R} &= \frac{E_0^2}{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2} - \frac{2(R+R_0)RE_0^2}{((R+R_0)^2 + L^2\omega^2)^2} \\ &= E^2\frac{(R+R_0)^2 + L^2\omega^2 - 2(R+R_0)R}{((R+R_0)^2 + L^2\omega^2)^2}\end{aligned}$$

Alors $\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}'}{\mathrm{d}R} = 0 \leftrightarrow R^2 = R_0^2 + L^2\omega^2 \leftrightarrow \boxed{R'_m = \sqrt{R_0^2 + L^2\omega^2} = 33\ \Omega}$.