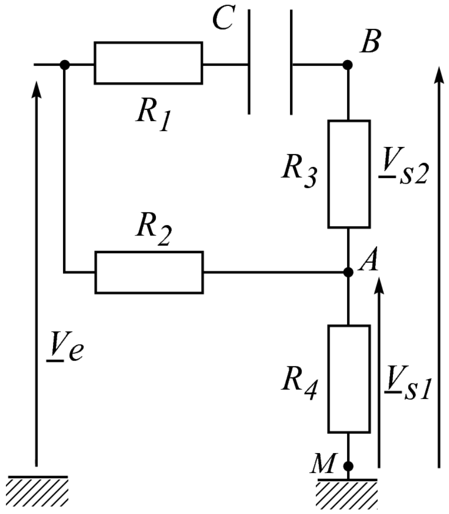
TD d'Électrocinétique : Filtres

Ex-TD/E6.1 **Filtre** On considère le filtre suivant (tension de sortie v_{s1}) :



1) Prévoir le comportement haute et basse fréquence de ce filtre. De quelle famille de filtre est-il voisin ?

① Filtre passe-bas
② Filtre passe-haut
③ Filtre passe-bande
④ Filtre réjecteur de bande.

2) On exprime la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_{s1}}{\underline{V}_e}$ sous la forme : $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{1 + j\tau_1\omega}{a + j\tau_2\omega}$

L'expression de a est :

① $a = 1 + \dfrac{R_4}{R_2}$ ② $a = 1 + \dfrac{R_3}{R_1}$
③ $a = \dfrac{R_1 + R_2 + R_3}{R_4}$ ④ $a = 1 + \dfrac{R_2}{R_4}$

3) L'expression de τ_1 est :

① $\tau_1 = (R_1 + R_2 + R_3)\, C$
② $\tau_1 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\, C$
③ $\tau_1 = (R_2 + R_4)\, C$
④ $\tau_1 = (R_1 + R_2)\, C$

4) L'expression de τ_2 est :

① $\tau_2 = R_3 C$ ② $\tau_2 = \dfrac{R_2\,(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} C$
③ $\tau_2 = \left(R_1 + R_2 + R_3 + \dfrac{(R_1 + R_3)\, R_2}{R_4}\right) C$
④ $\tau_2 = \dfrac{R_2\,(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 C$

5) Dans toute la suite de l'exercice, on fera l'hypothèse que $\tau_1 \gg \dfrac{\tau_2}{a}$. Le gain en décibel du filtre sera noté $G_{dB}(\omega)$ et φ le déphasage entre la tension de sortie et la tension d'entrée.
Donner une valeur (ou une expression) approchée du gain en décibel et du déphasage dans l'intervalle de pulsation $\omega \ll \dfrac{1}{\tau_1} \ll \dfrac{a}{\tau_2}$:

① $G_{dB}(\omega) \approx 0$ et $\varphi \approx 0$
② $G_{dB}(\omega) \approx -20\log(a)$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$
③ $G_{dB}(\omega) \approx -20\log(a)$ et $\varphi \approx 0$
④ $G_{dB}(\omega) \approx 20\log(a)$ et $\varphi \approx -\pi$

6) Donner une valeur (ou une expression) approchée du gain en décibel et du déphasage dans l'intervalle de pulsation $\dfrac{1}{\tau_1} \ll \omega \ll \dfrac{a}{\tau_2}$:

① $G_{dB}(\omega) \approx 0$ et $\varphi \approx 0$
② $G_{dB}(\omega) \approx 20\log(\omega\tau_1) - 20\log(a)$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$
③ $G_{dB}(\omega) \approx 20\log(\omega\tau_2) + 20\log(a)$ et $\varphi \approx \dfrac{\pi}{2}$
④ $G_{dB}(\omega) \approx 20\log(\omega\tau_1) - 20\log(a)$ et $\varphi \approx 0$

7) Donner une valeur (ou une expression) approchée du gain en décibel et du déphasage dans l'intervalle de pulsation $\dfrac{1}{\tau_1} \ll \dfrac{a}{\tau_2} \ll \omega$:

① $G_{dB}(\omega) \approx -20\log\dfrac{\tau_2}{\tau_1}$ et $\varphi \approx 0$
② $G_{dB}(\omega) \approx -20\log(a)$ et $\varphi \approx 0$
③ $G_{dB}(\omega) \approx -20\log(\omega\tau_2)$ et $\varphi \approx 0$
④ $G_{dB}(\omega) \approx -20\log(\omega\tau_2)$ et $\varphi \approx -\pi$

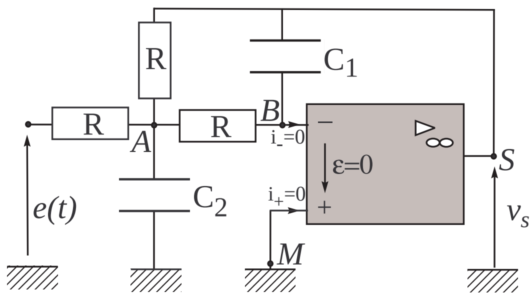
8) Exprimer la relation entre la fonction de transfert $\underline{H}_2(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_{s2}}{\underline{V}_e}$ et $\underline{H}_1(j\omega)$ en fonction des valeurs des éléments du circuit.

① $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{R_2R_4\underline{H}_2(j\omega) + R_1R_3}{R_2R_4 + R_3R_4 + R_2R_3 + R_1R_4}$
② $\underline{H}_1(j\omega) = \underline{H}_2(j\omega)$
③ $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{R_3}{R_4 + R_3}\underline{H}_2(j\omega)$
④ $\underline{H}_1(j\omega) = \dfrac{R_2R_4\underline{H}_2(j\omega) + R_3R_4}{R_2R_4 + R_3R_4 + R_2R_3}$

Ex-TD/E6.2 **Filtre à structure de Rauch**

[d'après Morellet/Grossart, p. 258]

On réalise un filtre à l'aide du montage suivant. L'amplificateur opérationnel est supposé idéal et en régime linéaire.



1) En déterminant la tension de sortie du filtre à basses et hautes fréquences, déterminer la nature de ce filtre.

2) En utilisant le théorème de MILLMAN en A et B, établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}$ du montage que l'on mettra sous la forme : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + 2m\dfrac{j\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$ en déterminant H_0 ainsi que les expressions de ω_0 et m en fonction de R, C_1 et C_2.

On souhaite obtenir une fréquence $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 5\ Hz$ *et un facteur d'amortissement* $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On choisit $R = 470\ \Omega$.

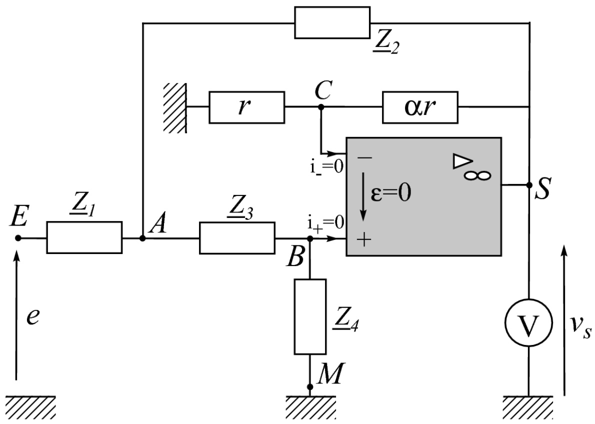
3) Calculer les valeurs des capacités C_1 et C_2.

4) Pour les valeurs numériques précédentes, tracer le diagramme de BODE asymptotique (gain et phase) ainsi que l'allure des courbes réelles.

On utilisera comme variable la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.

Ex-TD/E6.3 **Filtre actif (Ecole de l'Air 2004)**

Le montage amplificateur ci-contre comporte un amplificateur opérationnel idéal idéal en régime linéaire. La tension $e(t)$ est sinusoïdale. On utilisera la notation complexe.



1) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_B en fonction de celle du potentiel en S.

2) Exprimer l'amplitude complexe du potentiel V_A en A en fonction de celles des potentiel en E et S, des admittances $\underline{Y}_i = \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$ et de α.

mc3) En déduire la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{E}}$ (où $\underline{E}$ est l'amplitude complexe de la force électromotrice $e(t)$ et $\underline{V}_S$ celle de la tension de sortie v_s) en fonction des admittances $\underline{Y}_i$ et de α.

4) On pose $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \dfrac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$.

Montrer que $\underline{H}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

Donner les expressions de A, m et ω_0.

Réponse partielle : $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \dfrac{\underline{Y}_1}{\left((\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\dfrac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} - \underline{Y}_3\right)\dfrac{1}{1+\alpha} - \underline{Y}_2}$

5) À quelle condition a-t-on amplification du signal ?

6) Tracer l'allure du diagramme de BODE (pour le gain) des trois courbes correspondant aux cas suivants : $m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$.

Solution Ex-TD/E6.1

1) ②; **2)** ④; **3)** ①; **4)** ③; **5)** ③; **6)** ②; **7)** ①; **8)** ④ : Appliquer MILLMAN en A.

Solution Ex-TD/E6.2

1) • Puisqu'un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basses fréquences ($\frac{1}{C\omega} \to \infty$ si $\omega \to 0$), alors $V_A = V_B$ car parcourue par $i_- = 0$.
Comme B est une masse virtuelle (pour un AO idéal : $V_B = V_{E-} = V_{E+} = V_M = 0$), on en déduit que $V_A = 0$.
La loi des nœuds en termes de potentiels en A donne : $\dfrac{\underline{E} - \underline{V}_A}{R} + \dfrac{\underline{V}_S - \underline{V}_A}{R} + \dfrac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{R} + 0 = 0$,
d'où : $\underline{V}_S = -\underline{E} \Leftrightarrow \boxed{v_S(t) = -e(t) \Leftrightarrow \underline{H}(\omega = 0) = -1}$.

• Puisqu'un condensateur se comporte comme un interrupteur fermé à hautes fréquences ($\frac{1}{C\omega} \to 0$ si $\omega \to \infty$), on a $\boxed{v_s(t) = u_{BM} = 0 \Leftrightarrow \underline{H}(\omega \to \infty) = 0}$.

• **Cl :** Le filtre se comporte comme un **filtre passe-bas**.

2) • Le théorème de MILLMAN appliqué au nœud A donne :

$$\underline{V}_A = \frac{\dfrac{\underline{E}}{R} + \dfrac{\underline{V}_B}{R} + \dfrac{\underline{V}_S}{R} + jC_2\omega\underline{V}_M}{\dfrac{3}{R} + jC2\omega} \Rightarrow \underline{V}_A = \frac{\underline{E} + \underline{V}_B + \underline{V}_S}{3 + jRC_2\omega} \quad ①$$

• Le théorème de MILLMAN appliqué au nœud B donne :

$$\underline{V}_B = \frac{\dfrac{\underline{V}_A}{R} + jC_1\omega\underline{V}_S + 0}{\dfrac{1}{R} + jC1\omega} \qquad \Rightarrow \underline{V}_B = \frac{\underline{V}_A + jRC_1\omega\underline{V}_S}{1 + jRC_1\omega} \quad ②$$

• Comme B est une masse virtuelle (cf **1**), on a $\underline{V}_B = 0$ et ① et ② conduisent à la relation :

$$\frac{\underline{E} + \underline{V}_S}{3 + jRC_2\omega} + jRC_1\omega\underline{V}_S = 0 \Leftrightarrow \underline{E} + \underline{V}_S + (3 + jRC_1\omega)jRC_1\omega\underline{V}_S = 0$$

$$\hookrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{-1}{1 + 3RC_1(j\omega) + R^2C_1C_2(j\omega)^2}} \quad (\star)$$

• Par comparaison avec la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 2, on obtient :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + 2m\dfrac{j\omega}{\omega_0} + \left(\dfrac{j\omega}{\omega_0}\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{H_0 = -1} \\ \boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}} \end{cases} \quad \boxed{m = \frac{3}{2}RC_1\omega_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}}$$

3) • De ce qui précède on tire deux relations liant C_1 et C_2 :

$$\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}} \Leftrightarrow C_1C_2 = \frac{1}{R^2\omega_0^2} \ ③ \quad \text{et} \quad m = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \Leftrightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{4}{9}m^2 \ ④.$$

• On en tire : $\boxed{C_1 = \dfrac{m}{3R\pi f_0} = 32\ \mu F}$ et $\boxed{C_2 = \dfrac{9}{4m^2}C_1 = \dfrac{3}{4mR\pi f_0} = 144\ \mu F}$

4) • La fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j2mx} = \frac{j}{2mx + j(x^2 - 1)} = He^{j\varphi} \text{ en posant } x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

• On en déduit : $\boxed{H = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + 4m^2x^2}}}$ et $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left[\dfrac{1}{2m}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\right]}$

car $\varphi = \arg\underline{H} = \arg j - \arg[2mx + j(x^2 - 1)] = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{x^2 - 1}{2mx}\right)$

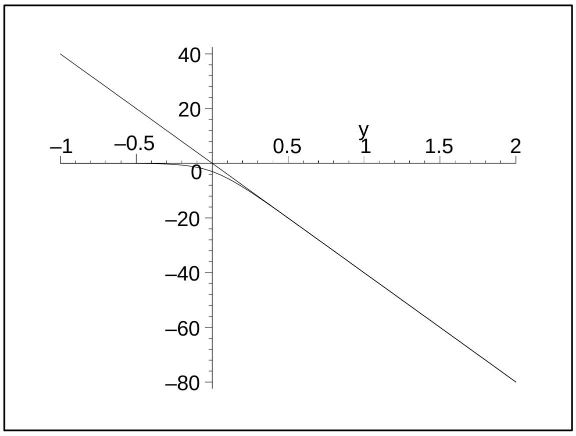
• La gain en décibels est : $\boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log H = -10\log[(x^2 - 1)^2 + 4m^2x^2]}$

• **Asymptote basses fréquences :** pour $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow x \ll 1$, on a :
$G_{dB} \to \boxed{G_{dB}(ABF) = 0\ dB}$ et $\varphi \to \boxed{\varphi(0) = \pi}$

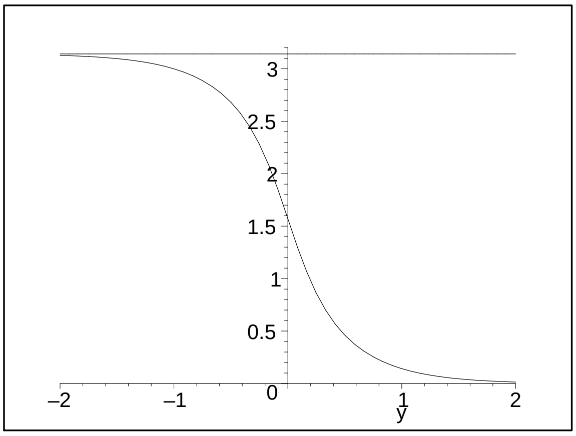
On en déduit que pour $x \ll 1$, la courbe de réponse en gain en décibels présente une asymptote horizontale de valeur $0\ dB$ et que la courbe de réponse en phase présente une asymptote horizontale de valeur $180°$.

• **Asymptote hautes fréquences :** pour $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow x \gg 1$, on a :
$G_{dB} \rightarrow \boxed{G_{dB}(AHF) = -40 \log x\ dB}$ et $\varphi \rightarrow \boxed{\varphi(\infty) = 0}$
On en déduit que pour $x \gg 1$, la courbe de réponse en gain en décibels présente une asymptote de pente $-40\ dB/dc$ passant par l'origine et que la courbe de réponse en phase présente une asymptote horizontale de valeur $0°$.

• Pour $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow x = 1$, on a $\underline{H} = \dfrac{-jH_0}{2m} = j\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
D'où $\boxed{G_{dB}(\omega_0) = 20 \log \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -3,0\ dB}$ et $\boxed{\varphi = 90°}$.
Rq : le fait que $G_{dB}(\omega_0) - G_{dB}(max) = -3,0\ dB$ indique que ω_0 représente la pulsation de coupure du filtre.



(a) $G_{dB}(\log(x))$



(b) $\varphi(\log(x))$

Solution Ex-TD/E6.3

1) Pour un A.O. idéal en régime linéaire, $\underline{V}_B = \underline{V}_+ = \underline{V}_- = \underline{V}_C$. Alors, la Loi des nœuds en termes de potentiels en C donne :
$\dfrac{\underline{V}_M - \underline{V}_C}{r} + \dfrac{\underline{V}_S - \underline{V}_C}{\alpha r} + 0 = 0$ soit : $\boxed{\underline{V}_B = \underline{V}_C = \dfrac{\underline{V}_S}{1+\alpha}}$ ①.

2) La **L.N.T.P.** appliquée au point A s'écrit :

$$\frac{\underline{E} - \underline{V}_A}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{V}_S - \underline{V}_A}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{\underline{Z}_3} = 0 \Leftrightarrow (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\,\underline{V}_A = \underline{Y}_1\underline{E} + \underline{Y}_2\underline{V}_S + \underline{Y}_3\underline{V}_B$$

Soit, grâce à ① : $\boxed{\underline{V}_A = \dfrac{\underline{Y}_1\underline{E} + \left(\underline{Y}_2 + \dfrac{\underline{Y}_3}{1+\alpha}\right)\underline{V}_S}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}}$ ②

3) Comme $i_+ = 0$, la **L.N.T.P.** appliquée en B s'écrit :

$$\frac{\underline{V}_A - \underline{V}_B}{\underline{Z}_3} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_B}{\underline{Z}_4} + 0 = 0 \Leftrightarrow \underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\underline{V}_B \xrightarrow{①} \boxed{\underline{V}_A = \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\frac{\underline{V}_S}{1+\alpha}} \text{ ③}$$

$$② \xrightarrow{③} \frac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3}\frac{\underline{V}_S}{1+\alpha} = \frac{\underline{Y}_1\underline{E} + \left(\underline{Y}_2 + \dfrac{\underline{Y}_3}{1+\alpha}\right)\underline{V}_S}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\hookrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{\underline{Y}_1}{\left((\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3)\dfrac{\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4}{\underline{Y}_3} - \underline{Y}_3\right)\dfrac{1}{1+\alpha} - \underline{Y}_2}} \text{ ④}$$

4) En utilisant $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_3 = \dfrac{1}{R}$ et $\underline{Y}_2 = \underline{Y}_4 = jC\omega$, la fonction de transfert devient :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{V}_S}{\underline{E}} = \frac{1+\alpha}{1 + j(2-\alpha)RC\omega - R^2C^2\omega^2}}$$

qu'on peut écrire sous la forme : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \dfrac{A}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ ⑤

en posant $\boxed{A = 1+\alpha}$, $\boxed{m = 1 - \dfrac{\alpha}{2}}$ et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{RC}}$.

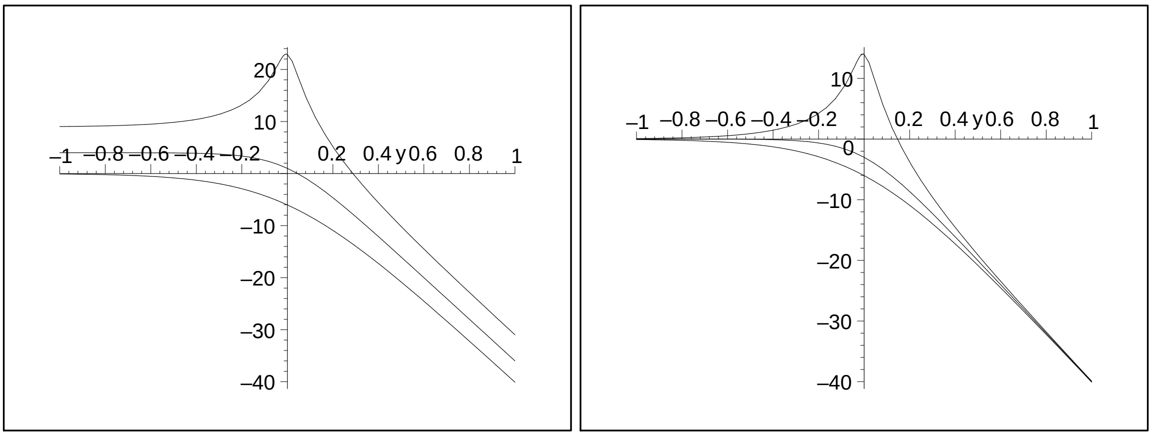
5) La forme canonique de la fonction de transfert est celle d'un **filtre passe-bas**.
Mais un filtre passe-bas donc le facteur d'amortissement est paramétré par la valeur de α qui, sur un certain intervalle, permet au module $H(\omega)$ de la fonction de transfert de passer par un maximum.
En effet $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{A}{\sqrt{(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + 4m^2\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \dfrac{A}{\sqrt{f(X)}}$,

en posant $f(X) \equiv (1-X)^2 + 4m^2X = X^2 + 2(2m^2-1)X + 1$ et $X \equiv \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}$.
$H(\omega)$ passe par un maximum (H_{max}) lorsque $f(X)$ passe par un minimum, c'est-à-dire lorsque, pour $w = w_m$:
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}(X_m) = 2X_m + 2(2m^2-1) = 0 \Leftrightarrow X_m = 1 - 2m^2 > 0$

$\hookrightarrow$ $\boxed{\omega_m = \omega_0\sqrt{1-2m^2} < \omega_0 \ \text{ avec : } 0 < m < \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Dans ce cas ($m < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$), le filtre se comporte comme un amplificateur de tension.

6) • La courbe de réponse en gain revient à tracer l'évolution du gain en décibels : $G_{dB} = 20\log H$ en fonction de $\log x = \log\dfrac{\omega}{\omega_0}$: $\boxed{G_{dB} = 20\log A - 10\log((1-x^2)^2 + 4m^2x^2)}$
• Les asymptotes à basses fréquences et à hautes fréquences à cette courbes de réponses en gain ont les équations suivantes :
$\omega \ll \omega_0 \quad G_{dB} \longrightarrow \boxed{G_{dB}(ABF) = 20\log A}$: droite horizontale passant par $(0, 20\ logA)$.
$\omega \gg \omega_0 \quad G_{dB} \longrightarrow \boxed{G_{dB}(ABF) = 20\log A - 40\log x}$: droite de pente $-40\ dB/dec$ passant par $(0, 20\ logA)$.



(c) G_{dB} pour $m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$ (d) $G_{dB} - 20\log A$ pour $m = 0,1$, $m = 0,707$ et $m = 1$