TD de Mécanique : Moment d'une force

Ex-TD/M6.1 Q.C.M.

1) Quelle est la dimension du moment évalué en O d'une force $\overrightarrow{F}$ appliquée en M ?

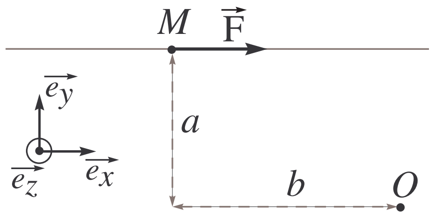
a) $[\mathcal{M}] = M.L.T^{-2}$ **b)** $[\mathcal{M}] = M.L^2.T^{-1}$ **c)** $[\mathcal{M}] = M.L^2.T^{-2}$ **d)** $[\mathcal{M}] = L^2.T^{-3}$

2) À quelle autre(s) grandeur(s) physique(s) rencontrée(s) dans le cours de mécanique est homogène le moment d'une force ?

a) Une vitesse **b)** Une énergie **c)** Un travail **d)** Une puissance

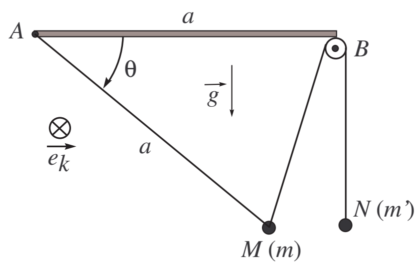
3) Le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})$ de la force $\overrightarrow{F}$, d'intensité $\| \overrightarrow{F} \| = F$, par rapport à O est :

a) $Fa\,\overrightarrow{e_z}$ **b)** $-Fb\overrightarrow{e_y}$
c) $-Fb\overrightarrow{e_z}$ **d)** $-Fa\overrightarrow{e_z}$



Ex-TD/M6.2 Moments des forces et condition d'équilibre [d'après Concours Mines-Ponts]

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à une socle horizontal AB (de longueur a), et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions.
En un point M, tel que $AM = a$, est fixée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N.
Le dispositif est placé verticalement dans le champs de pesanteur $\overrightarrow{g}$.

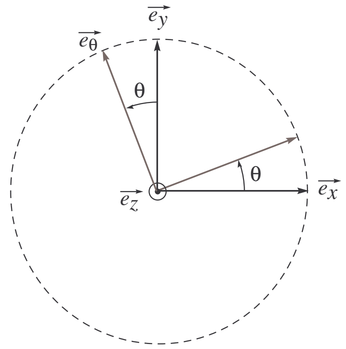


1) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A ; le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera : $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.
2) Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer, quand il existe, l'angle d'équilibre θ_e, en fonction de m et m'.

Ex-TD/M6.3 Rappel sur le produit vectoriel

1) Choisir la ou le(s) bonne(s) réponse(s).
Les bases $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ sont orthonormées et directes.

a) $\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y}$ **b)** $\overrightarrow{e_x} \times \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z}$
c) $\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{e_y} = -\cos\theta\overrightarrow{e_z}$ **d)** $\overrightarrow{e_\theta} \times \overrightarrow{e_y} = -\sin\theta\overrightarrow{e_z}$



2) Deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ sont exprimés dans la base orthonormée directe $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$:

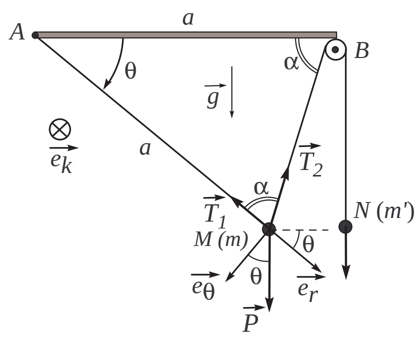
$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Leurs produit vectoriel $\overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$ est :

a) $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_2b_3 - a_3b_2 \end{pmatrix}$ **d)** $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Solution Ex-TD/M6.1

1) Rép : c)
2) Rép : b) et **c)**
3) Rép : d)

Solution Ex-TD/M6.2



1) • On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le système $\{M, m\}$ est soumis :
- à son poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
- à la tension $\overrightarrow{T_1}$ de la portion de fil AM, orientée de M vers A : $\overrightarrow{T_1} = -T_1\overrightarrow{e_r}$ (avec $T_1 = \| \overrightarrow{T}_1 \|$)
- à la tension $\overrightarrow{T_2}$ de la portion de fil MB, orientée de M vers B : $\overrightarrow{T_2} = T_2\overrightarrow{e}_{M\to B}$ (avec $T_2 = m'g$ car la poulie étant parfaite et le fil étant tendu, l'intensité du poids qui s'exerce en N est intégralement transmise en M).

• Chacune de ces forces présente, en A, un moment calculable dès que l'on s'est fixé une base orthonormée directe de l'espace – $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e}_k)$ par exemple.
• Pour le poids, ce moment vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{P} = AM.P.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\overrightarrow{e}_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) = mga\cos\theta\,\overrightarrow{e}_k}$$

• Puisque $\overrightarrow{T_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, son moment est nul : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_1}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{0}}$
• Pour la tension $\overrightarrow{T_2} = m'g\,\overrightarrow{e}_{M\to B}$, avec le vecteur $\overrightarrow{e}_{M\to B}$ contenu dans le plan du dessin et faisant un angle $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ (puisque AMB est isocèle en A) avec le vecteur $-\overrightarrow{e_r}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T_2} = \underset{(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e}_k)}{\left|\begin{array}{l} a \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.} \times \left|\begin{array}{l} -m'g\cos\alpha \\ -m'g\sin\alpha \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -m'ga\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}\right) \end{array}\right.$$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = -m'ga\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\overrightarrow{e}_k}$

2) • Le point M est soumis à une force résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$ dont le moment en A vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) + \cancel{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_1})} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = \left[mga\cos\theta - m'ga\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\overrightarrow{e}_k$$

Le point M est à l'équilibre à condition que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$ (aucune rotation de M autour de A), ce qui revient à imposer :

$$m\cos\theta - m'\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2m\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - m'\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - m = 0$$

rappel de Trigo : $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2} \;\Leftrightarrow\; \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, qu'on utilise ici en posant $x = \dfrac{\theta}{2}$.
• Par conséquent, étudier l'équilibre de M revient à résoudre un polynôme de degré 2 :

$$2mX^2 - m'X - m = 0 \quad \text{avec } X \equiv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = m'^2 + 8m^2 > m'^2 > 0$. Il existe donc deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} > 0 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{m' - \sqrt{\Delta}}{4m} < 0$$

Puisque θ est nécessairement compris entre 0 et π, on a $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$.
On en déduit que X_2 n'a pas de signification physique et que l'unique solution est X_1 :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}}$$

Sachant que cette solution n'a de sens que pour $X_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 1$, on doit vérifier l'inégalité suivante :

$$m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2} \leq 4m \quad \Leftrightarrow \quad m'^2 + 8m^2 \leq 16m^2 - 8mm' + m'^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8m(m - m') \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m \geq m'}$$

Solution Ex-TD/M6.3

1) Rép : b) et **d)**
2) Rép : a)