

# TD de Mécanique

## Moment cinétique (1) : Atome de Thomson

→ Cf Cours M6

En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON (1856-1940) proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre  $O$ , de rayon  $R$  et de charge  $+e$  uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse  $m$  ponctuelle et de charge  $-e$ . Le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_g(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est assimilé un référentiel galiléen.



En l'absence de toute action extérieure, l'électron  $M$  est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point

$$O : \vec{F} = -k\vec{OM} \text{ avec } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3}.$$

Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en  $O$ .

À l'instant  $t = 0$ , une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales :  $\vec{OM}(t=0) = \vec{OM}_0 = r_0\vec{e}_x$  et  $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_y$ .

**Données :**

$$m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}; e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}; \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ uSI}$$

$$\text{Vitesse de la lumière dans le vide : } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en  $O$ , d'axes de symétrie  $Ox$  et

$$Oy : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

**1)** Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en  $O$  de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de  $r_0$ ,  $v_0$  et  $m$ .

En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan ( $Oxy$ ).

**Rq :** La position de  $M$  est donc repérée dans les bases  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  et  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  avec comme vecteurs positions respectifs :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$  et  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$  (pour  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$ ).

**2)** Exprimer la pulsation  $\omega_0$  du mouvement de  $M$  en fonction de  $\epsilon_0$ ,  $e$ ,  $m$  et  $R$ . Calculer la valeur de  $R$  pour laquelle la pulsation  $\omega_0$  correspond à la fréquence  $\nu_0$  d'une des raies du spectre de LYMAN de l'atome d'hydrogène ( $\lambda_0 = 121,8 \text{ nm}$ ).

**3)** Déterminer les expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$ . Montrer que la trajectoire du point  $M$  est une ellipse (ellipse de HOOKE) dont vous préciserez les longueurs  $a$  et  $b$  des demi axes.

**4)** À quelles conditions cette trajectoire est-elle circulaire? Que se passe-t-il si  $v_0 = 0$ ?

**5)** L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux :  $\vec{f} = -h\vec{v}$ , où  $h$ , coefficient de freinage, est positif.

Quelle est l'évolution du moment cinétique en  $O$  de l'électron au cours du temps?

Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.

Commenter quant à la stabilité de l'atome.

**Solution**

- Système étudié :  $\{M, m, -e\}$ , électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen  $\mathcal{R}_g$ .
- Bilan des forces : le poids et l'interaction électrostatique exercée par le proton ( $O$ ). Le poids étant négligeable devant cette dernière force, on a :  $\vec{F}_{ext} = \vec{F} = -k\vec{OM}$  avec  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^3}$ .
- Cette force est centrale, donc  $\mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \times \vec{F} = \vec{0}$ .

1) • Le théorème du moment cinétique pour  $M$  appliqué en  $O$  point fixe du référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  :

$$\left( \frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \vec{OM} \times m\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{Cste}$$

- Le moment cinétique étant un vecteur constant, ce vecteur se calcule en considérant un instant particulier pour lequel on connaît les expressions du vecteur position  $\vec{OM}$  et de la vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}$ . C'est le cas à  $t = 0$  :  $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \vec{OM}_0 \times m\vec{v}_0 = r_0\vec{e}_x \times mv_0\vec{e}_y = mr_0v_0\vec{e}_z$

D'où :  $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \vec{Cste} = mr_0v_0\vec{e}_z$

- Comme  $\forall t \quad \vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) \perp \mathcal{T} = (\vec{OM}, \vec{v}_{M/\mathcal{R}_g})$ , on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points  $M$  contenus dans les plans  $\mathcal{T}$ ) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de  $\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}$ ; en l'occurrence,  $\vec{e}_z$ .

→ Donc, la trajectoire de  $M$  est contenue dans le plan ( $Oxy$ ).

2) Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à l'électron donne :

$$m\vec{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \vec{F}, \text{ ce qui s'écrit aussi : } m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -k\vec{OM} \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \omega_0^2\vec{OM} = \vec{0} \quad (*)$$

avec :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , soit :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mR^3}}$ .

- Si on impose  $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi\frac{c}{\lambda_0}$ , on en déduit que :  $R = \left( \frac{\lambda_0^2}{16\pi^3\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \right)^{1/3}$

Pour l'**A.N.**, il suffit d'écrire  $R$  sous la forme :  $R = \left( \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mc^2} \right)^{1/3} = 100 \text{ pm}$

**Rq** : Ce résultat est cohérent avec la longueur caractéristique de la dimension d'un atome.

3) • La solution générale vectorielle de l'équation du mouvement (\*) est :

$$\vec{OM} = \vec{A} \cos(\omega_0 t) + \vec{B} \sin(\omega_0 t)$$

On en déduit l'expression générale de la vitesse de l'électron :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g} = -\omega_0 \vec{A} \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \vec{B} \cos(\omega_0 t)$$

- Ces deux expressions générales doivent vérifier les deux conditions initiales :

$\vec{OM}(t=0) = \vec{A} = r_0\vec{e}_x$  et  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}_g}(t=0) = \omega_0 \vec{B} = v_0\vec{e}_y$ , soit :

$$\vec{OM} = r_0 \cos(\omega_0 t)\vec{e}_x + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\vec{e}_y \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

- Comme  $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$  on en déduit l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ avec : } a = r_0 \text{ et } b = \frac{v_0^2}{\omega_0^2}$$

→ La trajectoire est une ellipse de centre  $O$ , de demi-grand axe  $a$  selon  $Ox$  et de demi-petit axe  $b$  selon  $Oy$ .

- 4) • Pour que la trajectoire *a priori* elliptique soit circulaire, il faut que  $a = b$ , soit :  $v_0 = r_0\omega_0$ .
- Lorsque la vitesse initiale de l'électron est nulle :  $b = \frac{v_0}{\omega_0} = 0$ .

**CI** : L'ellipse s'assimile à un segment  $2a$  : le mouvement est rectiligne selon  $Ox$  entre l'abscisse  $a$  et l'abscisse  $-a$  (on retrouve l'oscillateur harmonique à une dimension).

**Rq** : On remarque l'importance des conditions initiales dues à la perturbation à  $t = 0$ , elles vont fixer la nature de la trajectoire de l'électron dans l'atome.

- 5) • Il faut prendre en compte une force de freinage dont il faut calculer le moment en  $O$  :

$$\mathcal{M}_O(\vec{f}) = \vec{OM} \times \vec{f} = \vec{OM} \times (-h\vec{v}) = -\frac{h}{m}\vec{OM} \times m\vec{v} = -\frac{h}{m}\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

Dès lors, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) + \mathcal{M}_O(\vec{f}) = \vec{0} - \frac{h}{m}\vec{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{M/O}}{dt}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{h}{m}\vec{L}_{M/O} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \vec{L}_{M/O}(t) = \vec{L}_{M/O}(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

**CI** : Le moment cinétique de l'électron en  $O$  tend vers  $\vec{0}$  avec une constante de temps  $\tau = \frac{m}{h}$ .

- Le **P.F.D.** pour l'électron s'écrit désormais :

$$m\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = -k\vec{OM} - h\frac{d\vec{OM}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\vec{OM}}{dt} + \omega_0^2\vec{OM} = \vec{0}$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{m\omega_0}{h}$

→ On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique (spatial) amorti** : le rayon vecteur  $r = OM$  tend vers 0.

**CI** : Même si l'amortissement (qui traduit le rayonnement de l'électron) est faible, l'électron va se diriger inexorablement vers le centre  $O$  en tourbillonnant dans une trajectoire elliptique d'aire de plus en plus faible.

**Rq** : L'atome tel que l'a décrit ici THOMSON ne peut pas être stable. Niels BOHR crée en 1913 un autre modèle d'atome pour rendre compte de la stabilité atomique : les orbites des électrons sont alors quantifiées. ce fut le dernier modèle obéissant à la physique classique avant l'avènement de la physique quantique.