Correction du Devoir Surveillé n°2

"Maître Zeng dit : « Étudier sans réfléchir est vain, mais réfléchir sans étudier est dangereux. »
Le Maître dit : « Attaquer un problème par le mauvais bout, voilà qui est désastreux ! »"
▷ Confucius – *Entretiens* (II, 15 & 16)

I Cycliste du Tour de France [Centrale 2006, TSI]

1) Comme $\overrightarrow{f} = -k\,v\,\overrightarrow{v}$ est une *force* qui *s'oppose* au mouvement, $\boxed{k > 0}$ et $[k] = \dfrac{[f]}{[v^2]} = \dfrac{MLT^{-2}}{L^2T^{-2}}$ soit : $\boxed{[k] = ML^{-1}}$ et $\boxed{\text{uSI}(k) = kg.m^{-1}}$.

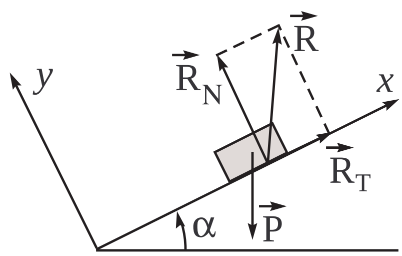
2) Le système étudié est soumis à son poids ($\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$), à la réaction da la route ($\overrightarrow{R}$), aux forces motrices qui fournissent la puissance mécanique $\mathcal{P}_0$ et à la force de frottement fluide $\overrightarrow{f}$.
Le théorème de la puissance cinétique donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\mathcal{P}(\overrightarrow{P})}_{0 \text{ car } \overrightarrow{P}\perp\overrightarrow{v}} + \underbrace{\mathcal{P}(\overrightarrow{R})}_{\text{négligeable}} + \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}(\overrightarrow{f}) = \mathcal{P}_0 + \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v} = \mathcal{P}_0 - kv^3$$

Comme $\mathcal{E}_k = \dfrac{1}{2}mv^2 = cte$, $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_0 - kv^3 = 0$ et on obtient : $\boxed{v = \left(\dfrac{\mathcal{P}_0}{k}\right)^{\frac{1}{3}}}$

3) $\boxed{v = 11,5\ m.s^{-1} = 41,6\ km.h^{-1}}$

II Cœfficient de frottement [ENSTIM 2004]



1) • On étudie le morceau de verre (assimilé à un point matériel M) dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
• La réaction $\overrightarrow{R}$ du plan incliné sur le petit morceau de verre se décompose en $\overrightarrow{R} = R_T\overrightarrow{e_x} + R_N\overrightarrow{e_y}$, où R_T est la coordonnée tangentiele de la réaction et R_N la coordonnée normale.
Le poids s'écrit $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\sin\alpha\overrightarrow{e_x} - mg\cos\alpha\overrightarrow{e_y}$.

• Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R}$.
• Comme M est immobile, $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$ et on obtient les composantes de la réaction :

$$\boxed{\begin{array}{c} R_T = mg\sin\alpha \\ R_N = mg\cos\alpha \end{array}} \quad \text{tant que le morceau de verre est au repos}$$

2) On constate que les deux coordonnées R_T et R_N de la réaction $\overrightarrow{R}$ sont positives et peuvent donc être confondues avec les modules des composantes tangentielle et normale de cette réaction.
On a donc : $\begin{cases} \| R_T \| = mg\sin\alpha \\ \| R_N \| = mg\cos\alpha \end{cases}$.

Le petit morceau de verre commence à glisser dès que : $\dfrac{\| R_T \|}{\| R_N \|} = \tan\alpha \geq \mu$
C'est-à-dire dès que l'angle α atteint la valeur limite α_{lim} définie par :

$$\tan\alpha \geq \tan\alpha_{lim} = \mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\alpha \geq \alpha_{lim} = \arctan\mu}$$

3) On mesure $\alpha_{lim} = 35°$, et on en déduit $\boxed{\mu = \tan\alpha_{lim} = 0,7}$.

III Bille sur un guide circulaire [ICNA 2006, q.15-21]

15) On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et O :

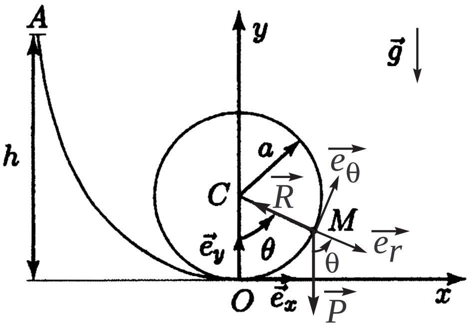
$$\Delta\mathcal{E}_{k,A\rightarrow O} = \frac{mv_0^2}{2} - \underbrace{\frac{mv_A^2}{2}}_{0} = W_{A\rightarrow O}(\overrightarrow{P}) + \underbrace{W_{A\rightarrow O}(\overrightarrow{R})}_{0 \text{ aucun frottement}}$$

Soit : $\frac{1}{2}mv_0^2 = -\Delta\mathcal{E}_{pg,A\rightarrow O} = -mg(y_O - y_A) = mgh$

D'où : $\boxed{v_0 = \sqrt{2gh} \quad \text{Rép. } \mathbf{A)}}$

16) Le Théorème de l'$\mathcal{E}_k$ entre O et M conduit à :
$v_M^2 = v_0^2 - 2gy_M = 2gh - 2ga(1-\cos\theta)$

D'où : $\boxed{v_M = \sqrt{2g[h + a(\cos\theta - 1)]} \quad \text{Rép. } \mathbf{D)}}$



17) Le **P.F.D.** appliqué pour le mouvement circulaire et exprimé dans la base polaire donne :

$$m \left| \begin{array}{lcl} \dot{a} - a\dot{\theta}^2 & = & mg\cos\theta + R \\ a\ddot{\theta} + 2\dot{a}\dot{\theta} & = & -mg\sin\theta \\ \ddot{z} & = & 0 \end{array} \right. \quad (\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$$

Comme le mouvement est circulaire de rayon $a = cste$ et de vitesse angulaire $\dot{theta}$, on a $a\dot{\theta}^2 = \frac{v_M^2}{a}$, ce qui permet d'écrire la composante R de la réaction $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e_r}$ sous la forme :
$R = -mg\cos\theta - ma\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta - m\frac{v_M^2}{a}$.

En utilisant le résultat de **17)**, on trouve : $\boxed{\overrightarrow{R} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\overrightarrow{e_r} \quad \text{Rép. } \mathbf{B)}}$

18) Le mouvement est révolutif dès lors que $R < 0$ pour toute position de M en contact avec la gouttière (puisque le contact impose $\overrightarrow{R}$ selon $-\overrightarrow{e_r}$).
En particulier, on doit avoir M a contact avec la gouttière pour $\theta = \pi$, ce qui impose :

$$\frac{2h}{a} + 3\cos\pi - 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{h > \frac{5a}{2} = h_{min} \quad \text{Rép. } \mathbf{B)}}$$

19) Puisque $h_0 = 2a < h_{min}$, la bille n'a pas de mouvement révolutif : elle quitte la gouttière pour $\theta_0 \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad R(\theta_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2h_0}{a} + 3\cos\theta_0 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\cos\theta_0 = -\frac{2}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta_0 = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = 131,8° \quad \text{Rép. } \mathbf{C)}}$$

20) $\overrightarrow{v_M} = v_M\,\overrightarrow{e_\theta}$ avec, pour $\theta = \theta_0$: $v_M(\theta_0) = v_0$ qu'on peut encore déterminer au moment du décollement à partir de la relation obtenue en **16)** : $v_0 = \sqrt{2g[h_0 + a(\cos\theta_0 - 1)]} = \sqrt{\frac{2ga}{3}}$
De plus, par définition de v_{0x}, on a : $v_{0x} = \overrightarrow{v_M} \cdot \overrightarrow{e_x} = v_0\cos\theta_0$, d'où :

$$\boxed{v_{0x} = -\frac{2}{3}v_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}} \quad \text{Rép. } \mathbf{A)}}$$

21) Puisque les frottements sont négligé, la bille est soumise à son seul poids (chute libre) à partir du moment où M décolle de la gouttière pour une date choisie comme origine $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\overrightarrow{v_M} = v_{0x}\overrightarrow{e_x} + v_{0y}\overrightarrow{e_y}$.

Par définition : $v_{0y} = \sqrt{v_0^2 - v_{0x}^2} = \sqrt{v_0^2 - \left(-\frac{2}{3}v_0\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}v_0$

$$m \left| \begin{array}{lcl} \ddot{x} & = & 0 \\ \ddot{y} & = & -mg \end{array} \right._{(\vec{e_x},\vec{e_y})} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & v_{0x} \\ \dot{y} & = & -gt + v_{0y} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & v_{0x}t + x_0 \\ y & = & -\frac{1}{2}gt + v_{0y}t + a(1-\cos\theta_0) \end{array} \right.$$

Par ailleurs, $y = y_{max} = h_M$ pour $\dot{y} = 0$, c'est-à-dire pour $t_M = \dfrac{v_{0y}}{g}$.

$\rightarrow$ D'où : $h_M = y_{max} = -\dfrac{1}{2g}v_{0y}^2 + \dfrac{v_{0y}^2}{g} + a(1-\cos\theta_0)$

Les valeurs de v_{0y} et de $\cos\theta_0$ (cf. **19)**) conduisent à : $\boxed{h_M = \dfrac{50}{27}a \quad \text{Rép. } \mathbf{A)}}$

« Si tu veux observer, retiens cette main qui veut prendre. Car il n'est pas difficile de changer l'objet ; et nous voyons que, dans les peuplades les plus arriérées, les métiers approchent souvent de la perfection ; mais ce n'est point la même chose de savoir planter la flèche au but et de savoir ce que c'est qu'un arc. Pareillement ce n'est point la même chose de savoir tuer le gibier et de savoir ce que c'est qu'un animal. Ce que tu peux changer, tu le connais mal. Si tu es politique, tu ne connaîtras point les hommes : et si tu séduis beaucoup de femmes, tu ne connaîtras point les femmes.

Aussi voyons-nous qu'un sauvage peut être fort habile à capturer choses, bêtes et gens, et conserver en même temps les idées les plus fausses concernant ce spectacle de la nature, qui lui est pourtant familier. Mais considérez un étrange détour de 1'histoire humaine ; les métiers, de chasseur, de pêcheur, de cuisinier, de chef n'ont jamais instruit personne, au lieu que le métier d'astrologue a jeté l'homme dans les chemins du vrai savoir, de la vraie sagesse et de la vraie puissance. Pourquoi ? Parce que cette curiosité pleine de passion ne pouvait ici le conduire à saisir la chose de ses mains pour la soumettre et la changer. Les astres étaient évidemment hors de nos prises ; ainsi le spectacle du ciel nous a appris l'observation bien malgré nous. Et l'astrologue est devenu astronome, bien malgré lui. Ici le calcul s'est développé sans que la main pût se porter sur l'objet. Ici le succès ne dépendait plus du savoir faire, mais seulement du savoir penser ; car il fallait attendre le retour de la lune ; et notre impatience ne fait pas que le soleil remonte plus vite. Les passions s'apaisent, et la nature se montre. Sans ce puissant intérêt qu'il attachait aux astres et aux saisons, comment l'homme aurait-il appris la patience ?

De proche en proche, l'esprit astronomique a redressé toutes nos recherches, nous exerçant à deviner au lieu de faire. Physique est née d'astronomie, non d'industrie. Chimie est née de physique, non de cuisine. Biologie est née de physique et de chimie, non de capturer ou dresser les bêtes ; et sociologie naîtra de biologie, et en réalité d'astronomie. Ce n'est pas par hasard qu'un polytechnicien est géomètre d'abord ; mais ce n'est pas sans risque non plus qu'il conduit trop vite son apprentissage astronomique ; car il lui arrivera peut-être de devenir un manieur de choses, comme ces forgerons africains qui font encore les meilleurs coutelas, et qui ne savent rien. Toi donc qui veux savoir, sois astronome d'abord, et reste ensuite astronome par la patience, je dirai même par le respect. Et, autant que tu peux, considère toutes choses astronomiquement ; tel est l'ancien sens du mot considérer ; oui, astronomiquement, ces hommes, cette guerre et cette paix ; et même ton chien ; sans quoi tu le comprendras, quand il t'obéit, à peu près aussi bien qu'il te comprend quand tu l'appelles. »

Alain – *Esquisses de l'homme* (1927) LXXXVII, 30 avril 1922