Correction du Devoir Surveillé n°3

I Oscillateur harmonique amorti : le ressort horizontal

1) • Le point matériel M de masse m est étudié dans le référetiel terrestre supposé galiléen. Soumis à son **poids**, à la réaction du support horizontal qui se décompose en une **composante normale de la réaction** $\overrightarrow{R}_N = R_N\,\overrightarrow{e_z}$ et une composante tangentielle qui constitue la **force de frottements** $\overrightarrow{F}_r = -h\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$, ainsi qu'à la **force de rappel du ressort** : $\overrightarrow{T} = -k\,(l - l_0)\,\overrightarrow{e_x} = -kx\,\overrightarrow{e_x}$.
• Le **P.F.D.** donne : $m\,\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_T} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{F}_r + \overrightarrow{T}$
• Comme $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_T} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x}$,
on en déduit, en projetant dans la base cartésienne : $\begin{cases} m\ddot{x} &= -h\dot{x} - kx \\ 0 &= -mg + R_N \end{cases}$

d'où : $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{h}{m}\,\dot{x} + \dfrac{k}{m}\,x = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (\star)$.

2) • $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2}$
• Théorème de l'Énergie mécanique :
$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = \underbrace{\delta W(\overrightarrow{R}_N)}_{0 \text{ car } \overrightarrow{R}_N \perp \mathrm{d}\overrightarrow{OM}} + \delta W(\overrightarrow{F}_r) = \overrightarrow{F}_r \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -h\dot{x}^2\,\mathrm{d}t < 0$$
→ donc l'énergie mécanique diminue ($\mathcal{E}_m \searrow$) au cours du temps ($\mathrm{d}t > 0$)
→ donc **le système n'est pas conservatif** et on a : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -h\dot{x}^2 < 0$

Soit : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = -h\dot{x}^2$ Ce qui permet de retrouver $(\star)$.

3.a) **La solution $x(t)$ de $(\star)$ doit être pseudo-sinusoïdale**, donc de la forme
$$x(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\exp(-\alpha t)$$
Pour cela, il faut que l'équation caractéristique de $(\star)$ ($r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$) admette un discriminant négatif :
$\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$, soit **un facteur de qualité** $\boxed{Q > \dfrac{1}{2}}$

3.b) Alors, l'équation caractéristique admet deux racines complexes :
$$\begin{cases} r_1 &= -\dfrac{\omega_0}{2Q} - j\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} &= -\dfrac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} &= -\alpha - j\omega \\ r_2 &= -\dfrac{\omega_0}{2Q} + j\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} &= -\dfrac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} &= -\alpha + j\omega \end{cases} \quad \text{avec } \alpha = \dfrac{\omega_0}{2Q}$$

Soit un mouvement de pseudo-pulsation : $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$ $(\star\star)$

pseudo-période : $\boxed{T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}}$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

4) Alors $\begin{cases} x(t) &= (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\exp(-\alpha t) \\ \dot{x}(t) &= ((B\omega - A\alpha)\cos\omega t - (A\omega + B\alpha)\sin\omega t)\exp(-\alpha t) \end{cases}$

Or $\begin{cases} x(t=0) &= x_0 &= A \\ \dot{x}(t=0) &= 0 &= B\omega - A\alpha \end{cases}$ Soit : $\begin{cases} A &= x_0 \\ B &= \dfrac{\alpha x_0}{\omega} = \dfrac{\omega_0 x_0}{2\omega Q} \end{cases}$

D'où : $\boxed{x(t) = x_0\left(\cos\omega t + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)}$

5) $x(t)$ est tel que $x(t+T) = x_0\left(\cos\omega t + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Soit : } x(t+T) = x(t)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right)\\ \text{d'où : } \delta \equiv \ln\dfrac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\left(\exp\left(-\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right)\right) = \dfrac{\omega_0 T}{2Q}\end{array}\right\} \quad \boxed{\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

6) Graphiquement : $\boxed{x_0 = 5\ cm \qquad T = 1\ s \qquad \delta = \ln\dfrac{x(0)}{x(T)} \cong \ln\dfrac{5}{2,3} = 0,78}$

D'après **5)** , on a : $\boxed{Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{4\pi^2}{\delta^2}} \approx 4,08}$

D'après $(\star\star)$, on a : $\boxed{T_0 = T\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}} \approx 992\ ms}$

$$\text{Comme}\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\omega_0}{Q} & = \dfrac{h}{m}\\ \omega_0^2 & = \dfrac{k}{m}\end{array}\right. \quad \begin{array}{ll}\boxed{h = m\dfrac{\omega_0}{Q} = m\dfrac{2\pi}{T_0 Q} \approx 0,155\ kg.s^{-1}} & (\text{ou } N.m^{-1}.s)\\ \boxed{k = m\omega_0^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} \approx 4,01\ kg.s^{-2}} & (\text{ou } N.m^{-1})\end{array} \quad \text{avec } m = 0,1\ kg.$$

7) d'après le portrait de phase :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \text{ce régime est pseudo-périodique}\\ \text{b)} & v_0 = \dot{x}_0 = 0\ m.s^{-1}\\ \text{c)} & x_0 = 5\ cm\\ \text{d)} & x_F = 0\ cm\\ \text{e)} & \delta = \ln\dfrac{x(0)}{x(T)} \cong \ln\dfrac{5}{2,25} \approx 0,80\\ & \delta = \ln\dfrac{x(T)}{x(2T)} \cong \ln\dfrac{2,25}{1} \approx 0,81\\ & \delta = \ln\dfrac{x(\frac{T}{2})}{x(\frac{3T}{2})} \cong \ln\dfrac{-3,4}{-1,5} \approx 0,81\end{array}\right\} \text{Résultats cohérents avec la question } \textbf{6)}\ .$$

8) $\mathcal{E}_m(t+T) = \mathcal{E}_k(t+T) + \mathcal{E}_p(t+T) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2(t+T) + \dfrac{1}{2}kx^2(t+T)$

$$\left.\begin{array}{ll}x(t+T) & = x(t)\exp(-\alpha T)\\ \dot{x}(t+T) & = \dot{x}(t)\exp(-\alpha T)\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_m(t+T) = \mathcal{E}_m(t)\exp(-2\alpha T) = \mathcal{E}_m(t)\exp\left(-\frac{\omega_0 T}{Q}\right)$$

avec $T \approx T_0$ car $Q \gg \dfrac{1}{2}$, soit $\omega_0 T \approx 2\pi$, d'où :

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T)}{\mathcal{E}_m(t)} = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{Q}\right) \approx 1 - \left(1 - \frac{2\pi}{Q}\right) = \frac{2\pi}{Q}}$$

II Régime continu [d'après CCP, Deug 2006]

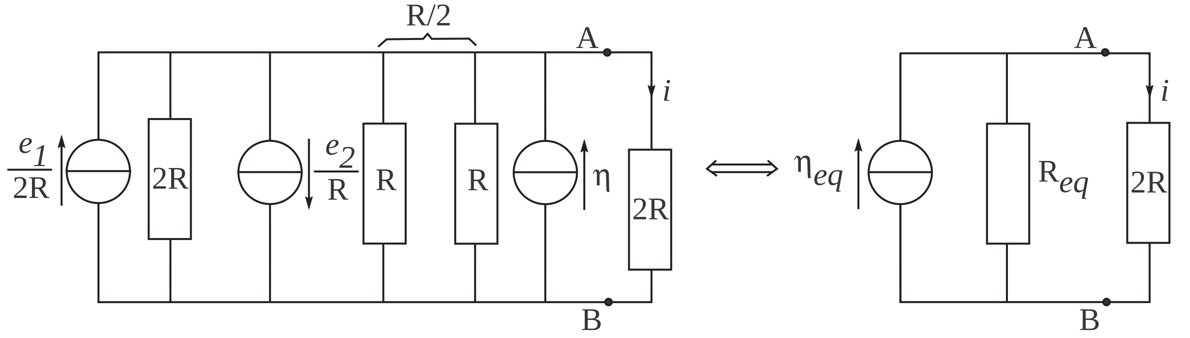
1) Si on applique la Loi des Nœuds en Termes de Potentiels au nœud A (où arrivent 5 branches, dont une contenant un courant électro-moteur) :

$$\frac{V_B - V_A + e_1}{2R} + \frac{V_B - V_A - e_2}{R} + \frac{V_B - V_A}{R} + \eta + \frac{V_B - V_A}{2R} = 0$$

Soit : $\dfrac{V_A - V_B}{2R}(1+2+2+1) = \dfrac{e_1}{2R} - \dfrac{e_2}{R} + \eta$

De plus, laLoi d'Ohm donne : $i = \dfrac{U_{AB}}{2R} = \dfrac{V_A - V_B}{2R}$, d'où : $\boxed{i = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{e_1}{2R} - \dfrac{e_2}{R} + \eta\right)}$

2) En effectuant deux transformations {Générateur de THÉVENIN → Générateur de NORTON}, on obtient deux schémas équivalents au montage du point de vue de la branche $\{A, R, B\}$:



Avec : $\eta_{eq} = \frac{e_1}{2R} - \frac{e_2}{R} + \eta$ et $R_{eq} = 2R//\frac{R}{2} = \frac{2R.\frac{R}{2}}{2R + \frac{R}{2}} = \frac{2R}{5}$

On reconnaît un diviseur de courant : $i = \frac{R_{eq}}{2R + R_{eq}}\,\eta_{eq}$, d'où : $\boxed{i = \frac{1}{6}\left(\frac{e_1}{2R} - \frac{e_2}{R} + \eta\right)}$

3) Application numérique : $\boxed{i = 2.10^{-2}\ A = 0,02\ A}$.

III Appareil photographique [Oral TPE 2001, option MP]

1) • Pour qu'un point A_∞ situé à l'infini sur l'axe optique donne un point image A' sur le film photo, il faut : $A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A_1 \equiv F'_1 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A'_{\in \text{pellicule}}$

• L'inconnue à déterminer étant $\overline{O_2A'} = d_2$, on applique la relation de DESCARTES pour $\mathcal{L}_2$:

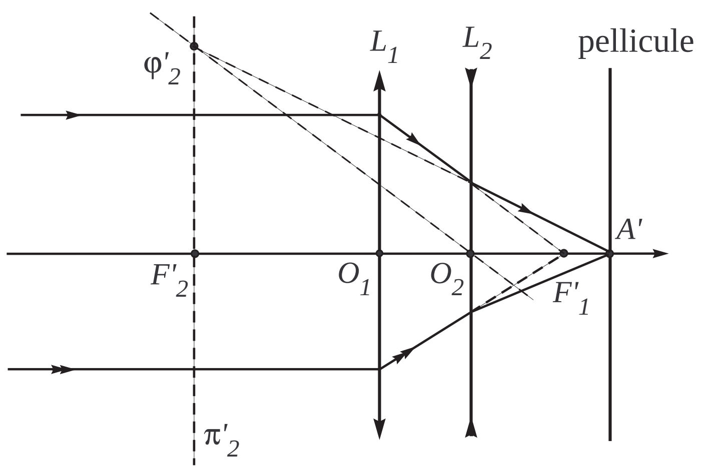
$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$ ①

• Or : $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -d_1 + d_2 + f'_1$ ②

$$① \overset{②}{\longrightarrow} \frac{1}{d_2} - \frac{1}{-d_1 + d_2 + f'_1} = \frac{1}{f'_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d_2^2 + (-d_1 + f'_1)\,d_2 + f'_2\,(d_1 - f'_1) = 0} ③$$

• La (seule) solution positive de ③ est la distance d_2 recherchée. **AN :** $\boxed{d_2 = 3\ cm}$.

2)
Rque : il faut avoir bien compris cette construction !!

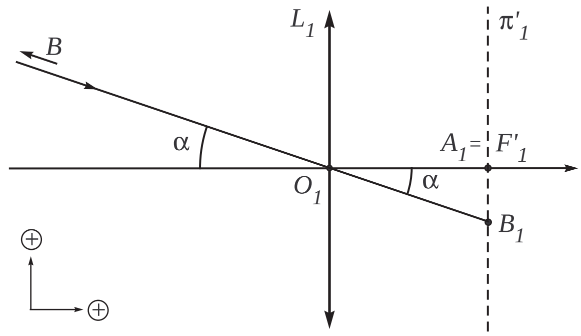


3) • Cette fois l'objet est un objet AB étendu, à l'infini, son image se formant sur la pellicule puisque l'appareil photo est réglé sur l'infini (cf. **1)**). On a donc :

$$B_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} B_{1,\in\Pi'_1} \xrightarrow{\mathcal{L}_2} B'_{\in\text{pellicule}}$$

• La taille de l'image intermédiaire ($A_1B_1 = F'_1B_1$) est :

$$\overline{A_1B_1} = \overline{F'_1B_1} = -f'_1 \tan\alpha \simeq -f'_1\,.\alpha$$



• Nous cherchons la taille de l'image finale $A'B'$. Pour cela, il suffit d'exprimer le grandissement transversal pour $\mathcal{L}_2$ avec origine au centre optique O_2 :

$$G_{t2} \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{d_2}{f'_1 - d_1 + d_2}$$

On en déduit la taille de l'image :

$$\boxed{\overline{A'B'} = \overline{A_1B_1}\,G_{t2} = -f'_1\,\alpha\,\frac{d_2}{f'_1 - d_1 + d_2} = -1,05\,mm}$$

• **Rque :** Dans l'application numérique, l'angle α doit être exprimé en radians !