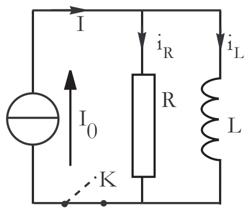
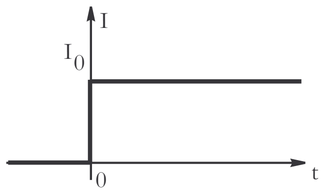
■ Régime transitoire et régime forcé continu

Ex-E4.1 **Circuit d'ordre 1 (1)**

Exprimer $i_R(t)$ et $i_L(t)$, puis tracer les courbes représentatives.

On posera $\tau = \dfrac{L}{R}$.





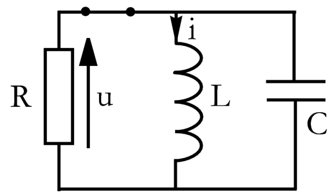
Rép : $i_L(t) = I\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ et $i_R(t) = I\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Ex-E4.2 **Circuit RLC parallèle**

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i en fonction de : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = RC\omega_0$.

2) On pose $\lambda = \dfrac{1}{2Q_0}$. Déterminer $i(t)$ sachant que $i(t=0) = i_0 \neq 0$ et $u(t=0) = 0$.

On distinguera trois cas : **a)** $\lambda = 1$, **b)** $\lambda > 1$ et **c)** $\lambda < 1$.



Rép : 1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0 = \dfrac{R}{L\omega_0}$;

2.a) $\lambda > 1$: $i(t) = \dfrac{i_0}{r_1 - r_2}\left(-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right)$ avec $r_{1/2} = -\lambda\omega_0 \mp \omega_0\sqrt{\lambda^2 - 1}$;

2.b) $\lambda = 0$: $i(t) = i_0(1 + \lambda\omega_0 t)e^{-\lambda\omega_0 t}$;

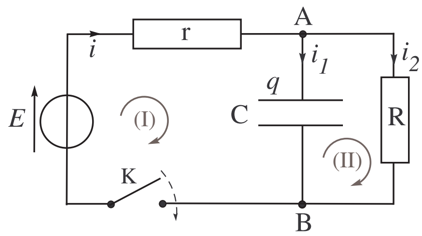
2.c) $\lambda < 1$: $i(t) = i_0(\cos\omega t + \dfrac{\sin\omega t}{\tau\omega})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \dfrac{1}{\lambda\omega_0}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$.

Ex-E4.3 **Circuit d'ordre 1 (2)**

Dans le circuit représenté ci-contre on ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé.

1) Établir l'expression de $q(t)$ où q est la charge du condensateur, en déduire i_1, i_2 et i en fonction du temps.

2) Calculer à la date t_1 l'énergie stockée dans le condensateur.

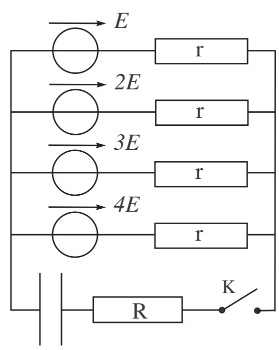


3) Écrire sous la forme d'une somme d'intégrales un bilan d'énergie entre les dates 0 et t_1.

Rép : 1) En posant $\tau = \dfrac{CRr}{R+r}$: $q(t) = \dfrac{ECR}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$; $i_1(t) = \dfrac{E}{r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$; $i_2(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$; $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 + \dfrac{R}{r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

Ex-E4.4 **Circuit d'ordre 1 (3)**

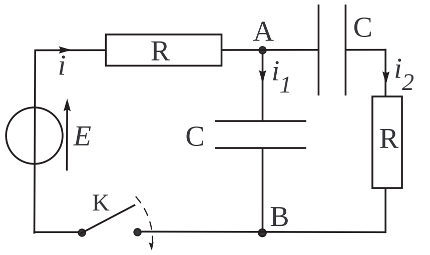
Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ dans le condensateur, ainsi que la tension $u(t)$ à ses bornes sachant que l'on ferme l'interrupteur à la date $t = 0$ et que le condensateur n'est pas chargé initialement. Représenter graphiquement $i(t)$ et $u(t)$.



Rép : $i(t) = \dfrac{10E}{4R+r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = C\left(R + \dfrac{r}{4}\right)$;

$u(t) = \dfrac{5E}{2}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

Ex-E4.5 **Régime transitoire apériodique (*)**



À $t = 0^-$, les condensateurs sont déchargés. On ferme alors l'interrupteur K.

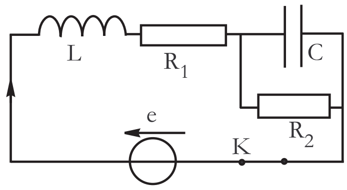
1) Établir l'équation différentielle en i_1.

2) Déterminer les conditions initiales $i_1(0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

3) Exprimer $i_1(t)$.

Rép : 1) i_1 vérifie l'équation canonique d'ordre 2 avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$; **2)** $i_1(0^+) = \frac{E}{R}$ et $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\frac{2E}{CR^2}$; **3)** $i_1(t) = \frac{E}{R}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}.\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{5}}{2RC}t\right)\right]\exp\left(-\frac{3t}{2RC}\right)$

Ex-E4.6 **Bobine et condensateur réels en série (1)**



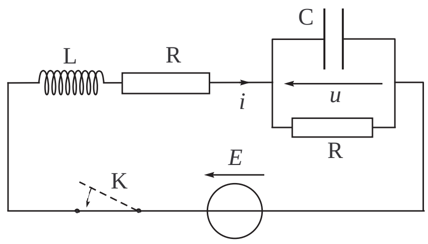
1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i.

2) À quelles conditions le régime transitoire est-il :
a) critique ; b) apériodique ; c) pseudo-périodique ?

Rép : 1) $\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}+^2}\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = \frac{e}{R_2LC}$ avec $\omega_0^2 = \frac{R_1+R_2}{R_2LC}$ et $Q = \frac{R_1+R_2}{R_1\left(R_2C + \frac{L}{R_1}\right)\omega_0}$.

2) ➜ Cf Cours **E4** : regarder le signe de Δ, discriminant de l'équation caractéritique, et donc la valeur de Q ($Q < \frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{2}$, $Q < \frac{1}{2}$).

Ex-E4.7 **Bobine et condensateur réels en série (2) : régime transitoire pseudo-periodique (*)**



Le montage ci-contre modélise une bobine réelle (L, R) en série avec un condensateur réel (C, R) initialement déchargé. On ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$

On impose la relation suivante : $\tau = \frac{L}{R} = RC$.

Initialement : $i(0^-) = 0$ et $u(0^-) = 0$.

1) Établir l'équation différentielle régissant $u(t)$, tension aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à $t = 0$, sur un générateur de tension E .

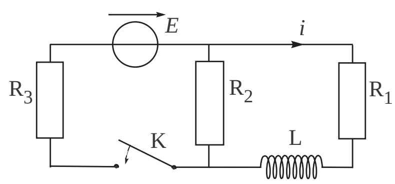
2) Déterminer $u(t)$ pour $t \geq 0$.

3) Déterminer $i(t)$, intensité circulant dans la bobine.

4) Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer U, tension aux bornes du condensateur, et I, courant dans la bobine, en régime permanent.

Rép : 3) $i(t) = \frac{E}{2R}\left[1 + \left(-\cos\frac{t}{\tau} + \sin\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$; **4)** Faire un schéma équivalent du montage lorsque le régime permanent continu est atteint : $I = \frac{E}{2R}$ et $U = \frac{E}{2}$.

Ex-E4.8 **Trois résistances et une bobine**



Le circuit étudié comporte trois résistances R_1, R_2 et R_3, une bobine parfaite d'inductance L, un générateur de *f.é.m.* E et un interrupteur K.

1) Initialement, la bobine n'est parcourue par aucun courant. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interupteur K.

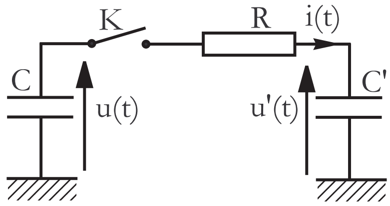
→ Établir la loi d'évolution de $i(t)$ et déterminer le courant I en régime permanent dans la bobine. On posera $\tau = \frac{L(R_2+R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$.

2) Le courant d'intensité I est établi, on ouvre à $t = 0$ (réinitialisation du temps !).

→ Déterminer la nouvelle loi donnant $i(t)$ et l'énergie dissipée par effet JOULE dans les résistances. On posera $\tau' = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$.

Rép : 1) $i(t) = I_0 \left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ avec $I_0 = \dfrac{ER_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$;
2) $i(t) = I \exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)$ et $\mathcal{E}_J = \dfrac{1}{2}LI^2$.

Ex-E4.9 Transfert de charge entre deux condensateurs :
Un condensateur de capacité C est chargé sous une *ddp* E, puis, à $t = 0$, est relié, par fermeture de l'interrupteur K, à un circuit (R, C') série (le condensateur de capacité C' est initialement non chargé).
1) Déterminer les variations du courant $i(t)$ de décharge du condensateur C.



2) Calculer la variation d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ du système constitué par la résistance R et les deux condensateurs C et C'.
3) Démontrer que $|\Delta\mathcal{E}|$ est aussi l'énergie dissipée par effet JOULE $\mathcal{E}_J$ dans la résistance R.
4) L'expression de $|\Delta\mathcal{E}|$ étant indépendante de R, que se passe-t-il lorsque R tend vers 0 ?

Rép : 1) $i(t) = \dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)$; **2)** $\Delta\mathcal{E} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{CC'}{C + C'}E^2$.

■ Régime sinusoïdal

E5

Ex-E4/5.1 Circuit RLC Série
1) Considérons le circuit dipolaire RLC série du cours alimenté par une tension sinusoïdale $(e(t) = E_0\cos(\omega t))$. → Établir que l'équation différentielle qui régit la tension aux bornes de la capacité C est :

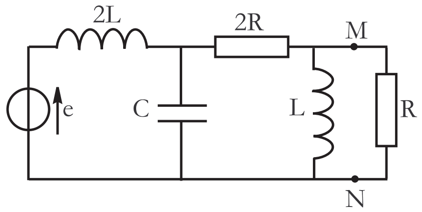
$$LC\,\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E_0\cos(\omega t)$$

→ Donner l'expression intrinsèque de cette équation différentielle en fonction de Q, facteur de qualité et de la pulsation propre ω_0.
→ Donner l'expression intrinsèque de cette équation différentielle en fonction de α, cœfficient d'amortissement et de la pulsation propre ω_0.
2) Établir que $u_C(t) = E_0\left[\sin(\omega_0 t) - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\exp\left(-\dfrac{1}{2}\,\omega_0 t\right)\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 t\right)\right]$ lorsque le circuit vérifie les quatre conditions suivantes :
(1) le condensateur est initialement déchargé ; **(2)** l'intensité est nulle avant la fermeture de l'interrupteur ; **(3)** la pulsation du générateur est $\omega = \omega_0$ et **(4)** le cœfficient d'amortissement vaut $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Ex-E5.2 Addition de deux signaux de même fréquence
Supposons deux signaux sinusoïdaux $S_1(t) = S_0\cos(\omega t)$ et $S_2(t) = S_0\sin(\omega t)$.
→ En utilisant les représentations complexes, calculer la somme $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$.
→ Préciser l'amplitude et la phase à l'origine de ce signal.
→ Tracer les fonctions $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S(t)$; vérifier le résultat précédent.
→ Si ces deux signaux sont deux tensions telles que $S_1(t)$ soit la tension aux bornes d'une résistance R et $S_2(t)$ la tension aux bornes d'un second dipôle, en déduire la nature de ce second dipôle.

Ex-E5.3 Réseau à trois mailles

On considère le réseau à trois mailles indépendantes, représenté ci-contre, alimenté par la source de tension alternative de *f.é.m.* : $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.
La fréquence du générateur est réglée de manière à avoir :

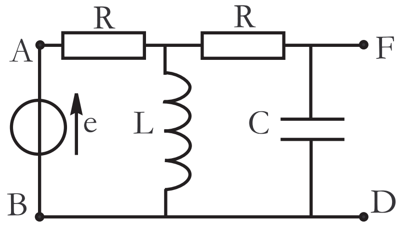


$$L\omega = \frac{1}{C\omega} = R.$$

Déterminer toutes les caractéristiques de l'intensité du courant dans la résistance R.
A. N. : $E = 20\ V$; $R = 10\ \Omega$.
Rép : $i(t) = 0,686\cos(\omega t - 1,82)\ A$, où $1,82\ rad = 104°$.

Ex-E5.4 Modélisation de Thévenin

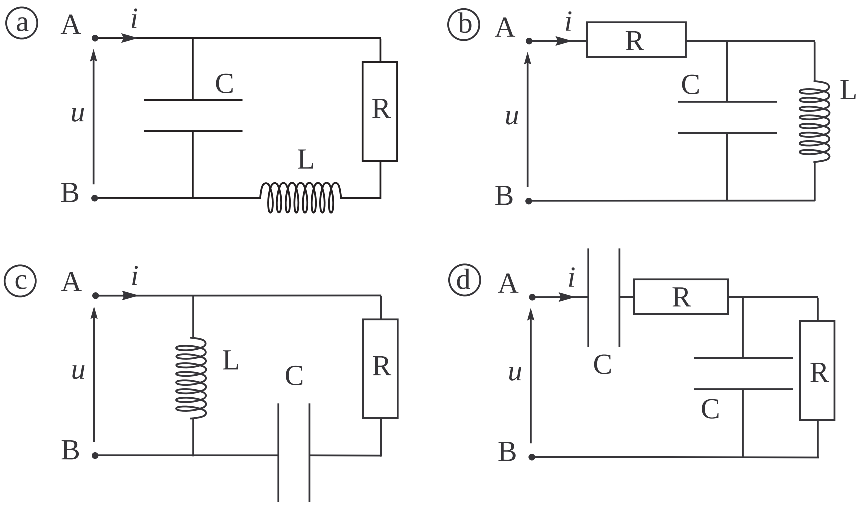
On considère le circuit suivant alimenté entre A et B par une source de tension alternative sinusoïdale de *f.é.m.* : $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.
Déterminer les caractéristiques du générateur de tension (modèle de Thévenin) équivalent entre F et D sachant que ω est telle que : $LC\omega^2 = 1$ et $RC\omega = 1$



Rép :
$\underline{E}_{Th} = \dfrac{2-j}{5}\underline{E} \Rightarrow e_{Th}(t) = E\sqrt{\dfrac{2}{5}}\cos(\omega t - 0,464)\ A$, où $-0,464\ rad = \arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \text{arg}\,(2-j)$.
Cette *f.é.m.* est en série avec $\underline{Z}_{\text{éq}} = R_{\text{éq}} + \dfrac{1}{jC_{\text{éq}}\omega}$ $\Rightarrow$ soit une résistance $R_{\text{éq}} = \dfrac{3R}{5}$ en série avec une capacité $C_{\text{éq}} = \dfrac{5C}{4}$.

Ex-E5.5 Calculs d'impédances

Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du réseau dipolaire entre les bornes A et B dans les quatre cas suivants.
En déduire à chaque fois l'impédance réelle Z ainsi que le déphasage de la tension u par rapport au courant i.



Ex-E5.6 Circuit RLC parallèle en régime sinusoïdal

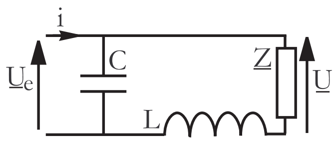
Exprimer la tension $\underline{u}$ aux bornes d'un réseau dipolaire constitué d'une résistance en parallèle avec une bobine en parallèle avec un condensateur en fonction de R, L, C, w et de $\underline{i} \equiv I_0\exp(j\omega t)$ (intensité fournie au dipôle).
Vérifier que l'étude de la résonance en tension u de ce cirduit RLC **parallèle** lorsqu'on applique un courant i sinusoïdal est identique à celle de la résonance en courant dans le circuit RLC **série**.
Exprimer alors ω_0, la pulsation propre, Q', le facteur de qualité du circuit RLC parallèle ainsi que $\alpha' \equiv \dfrac{1}{2Q'}$, son cœfficient d'amortissement.

Rép : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q' = RC\omega_0$.

Ex-E5.7

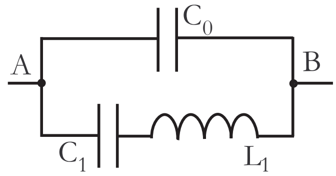
1) Exprimer $\underline{U}$ en fonction de $\underline{I}$, $\underline{Z}$, L, C et ω, pulsation du régime sinusoïdal imposé à ce circuit.

2) À quelle condition sur L, C et ω, $\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ et le déphasage entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ ne dépendent-ils pas de $\underline{Z}$?



Rép : 2) $LC\omega^2 = 1$.

Ex-E5.8 On alimente le dipôle AB avec une tension sinusoïdale de pulsation ω. → Déterminer l'impédance complexe de AB. Tracer $|\underline{Z}| = Z(\omega)$, puis montrer que cette courbe présente deux singularités pour les pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$).



Rép : $\underline{Z} = \dfrac{1 - L_1C_1\omega^2}{j[(C_0 + C_1)\omega - L_1C_1C_0\omega^3]}$.

Ex-E5.9 **Modélisation d'un condensateur réel**

On considère un diélectrique imparfait (isolant imparfait) de permittivité complexe $\epsilon = \epsilon_0.(x' - jx'')$ avec x' et x'' deux réels. C'est l'isolant d'un condensateur de capacité $C = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}C_0$.

Ce condensateur est soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U_m.cos(\omega t)$.

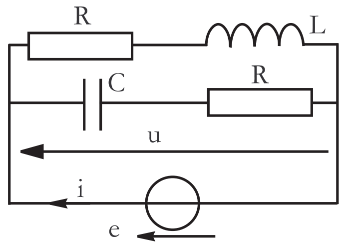
→ Exprimer l'impédance complexe du condensateur.

→ En déduire qu'on peut le considérer comme l'association d'un condensateur parfait de capacité C et d'une résistance R qu'on exprimera.

Rép : R et C en parallèle, avec : $R = \dfrac{1}{x''C_0\omega}$ et $C = C_0x'$.

Ex-E5.10

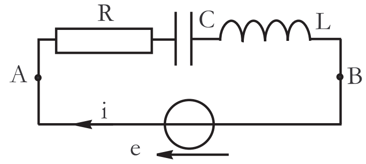
Sachant que $e = E_m.cos(\omega t)$, trouver la condition pour que $\underline{i}$ et $\underline{u}$ soient en phase quelle que soit ω.



Rép : $R = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, alors $\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = R$.

Ex-E5.11 **Puissance électrique (1)** On donne :
$R = 10\ \Omega$, $L = 100\ \mu H$, $C = 200\ \mu F$, $\omega = 5.10^6\ rad.s^{-1}$, $E_{\text{eff}} = 5\ V$.

Déterminer et calculer : l'impédance complexe du dipôle AB, le facteur de puissance et la puissance moyenne dissipée.

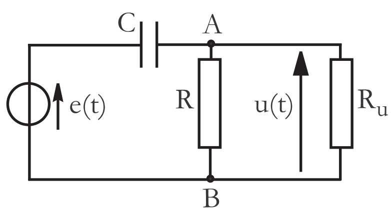


Rép : $\cos\varphi = 0,02$ et $< \mathcal{P} >= 1\ mW$ car :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) ; \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} ; < \mathcal{P} >= \frac{R.E_{\text{eff}}^2}{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Ex-E5.12 **Réponse harmonique d'un dipôle**

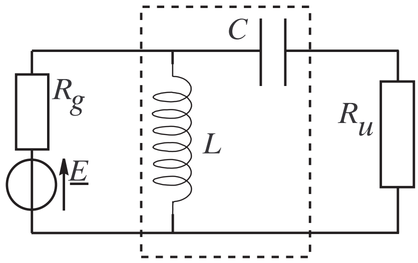
Déterminer la réponse harmonique $u(t)$ du dipôle AB ($R_u//R$) lorsqu'il est soumis à l'excitation sinusoïdale $e(t) = E_m.\cos(\omega t)$.



Rép : $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_u)$ avec, en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$:

$U_m = \dfrac{E_m\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}$ et $\varphi = \arctan\dfrac{\omega_0}{\omega}$.

Ex-E5.13 Adaptation d'impédance (1)



Pour transmettre une puissance maximale du générateur $(\underline{E}, R_g)$ à l'impédance de charge (d'utilisateur) $R_u \neq R_g$, on intercale entre le générateur et l'utilisateur un quadipôle réalisé avec une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C.

→ Montrer que le quadripôle permet l'adaptation d'impédance souhaitée lorsque $R_u < R_g$.

Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.

Solution Ex-E5.13

• Le générateur est branché sur un dipôle constitué d'une bobine en parallèle avec un condensateur en série avec une résistance. Appelons $\underline{Z}$ son impédance équivalente ($\underline{Z} = jL\omega//(R_u + \dfrac{1}{jC\omega})$).

La puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine est nulle ($< \mathcal{P}_C >=< \mathcal{P}_L >= 0$; ➜ Cf Cours **E5.V.1** et **E5.VI**). Le quadripôle intercalé entre le générateur et le récepteur R_u étant constitué de tels dipôles réactifs, la puissance fournie par le générateur est transmise sans pertes à l'utilisateur (R_u).

Donc « chercher la condition de transfert maximal d'énergie entre le générateur et R_u » revient à chercher la condition de transfert maximal d'énergie entre le générateur et le dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

Or pour que le générateur fournisse une puissance maximale, il faut qu'il soit branché sur une impédance $\underline{Z}$ telle que : $\underline{Z} = \underline{Z_g}^* = R_g$ (**condition d'adaptation d'impédance** ; ➜ Cf **E5.V.4**)

• Exprimons $\underline{Z}$: $\underline{Z} = jL\omega//\left(R_u + \dfrac{1}{jC\omega}\right) = \dfrac{jL\omega\left(R_u + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}{R_u + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$

D'où, en regroupant les termes réels et imaginaires :

$$\left(R_gR_u - \frac{L}{C}\right) + j\omega\left[L\left(R_g - R_u\right) - \frac{R_g}{C\omega^2}\right] = 0$$

L'égalité à zéro entraîne : $\dfrac{L}{C} = R_gR_u$ et $LC = \dfrac{R_g}{\omega^2\left(R_g - R_u\right)} > 0 \Rightarrow \boxed{R_g > R_u}$

On en déduit : $\boxed{L = \dfrac{R_g}{\omega}\sqrt{\dfrac{R_u}{R_g - R_u}}}$ et $\boxed{C = \dfrac{1}{\omega\sqrt{R_u\left(R_g - R_u\right)}}}$

Ex-E5.14 Adaptation d'impédance (2)

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220\ V$. Elle consomme une puissance $\mathcal{P} = 12\ kW$. La fréquence vaut $f = 50\ Hz$ et l'intensité efficace $I_{\text{eff}} = 80\ A$.

1) Sachant que cette installation est du type *inductif*, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série et avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation.

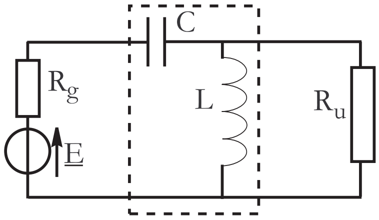
2) Calculer le facteur de puissance de cette installation. Calculer la capacité C à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à la valeur $0,9$.

Rép : 1) Établir que $R = \dfrac{< \mathcal{P} >}{I_{\text{eff}}^2} \simeq 1,9\ \Omega$; $L = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{U_{\text{eff}}^2}{I_{\text{eff}}^2} - \dfrac{< \mathcal{P} >}{I_{\text{eff}}^4}} \simeq 6,4\ mH$; **2)** Astuce : $\cos\varphi$ peut s'obtenir en exprimant l'admittance $\underline{Y}$ associée à $\underline{Z}$ car $\cos\varphi = \dfrac{\mathcal{R}e(\underline{Y})}{|\underline{Y}|}$ (➜ Cf Cours **E5.V.1**). On trouve $C = \dfrac{R}{\omega(R^2 + L^2\omega^2)}\left[\pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1} + \dfrac{L\omega}{R}\right]$, d'où 2 valeurs possibles pour

$\cos\varphi = 0,9$: $C_{\mathsf{max}} \simeq 1,23\ mF$ et $C_{\mathsf{min}} \simeq 0,46\ mF$.

Ex-E5.15 Adaptation d'impédance (3)

Pour transmettre une puissance maximale du générateur $(\underline{E}, R_g)$ à l'impédance de charge (d'utilisateur) $R_u \neq R_g$, on intercale entre le générateur et l'utilisateur un quadipôle réalisé avec une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C.

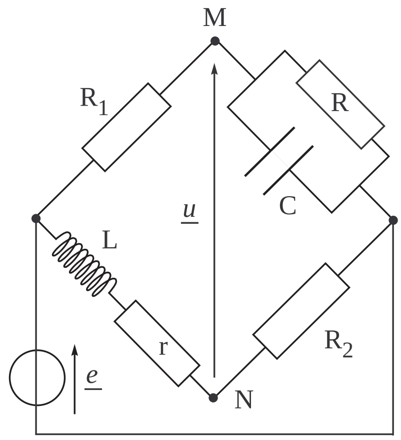


→ Montrer que le quadripôle permet l'adaptation d'impédance souhaitée lorsque $R_u > R_g$.
Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.

Rép : $L = \dfrac{R_u}{\omega}\sqrt{\dfrac{R_g}{R_u - R_g}}$ et $C = \dfrac{1}{\omega R_g}\sqrt{\dfrac{R_g}{R_u - R_g}}$.

Ex-E5.16 Équilibre d'un pont en régime sinusoïdal

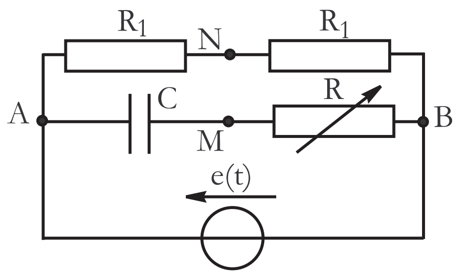
Le pont ci-contre est alimenté en régime alternatif.
À quelle condition le pont est-il équilibré ? c'est–dire à quelle condition $u = 0$?
Montrer que l'on peut déterminer L et r en fonction de C et des résistances R_1, R_2 et R.



Rép : $u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r &= \dfrac{R_1R_2}{R} \\ L &= R_1R_2C \end{cases}$

Ex-E5.17 Deux montages déphaseurs

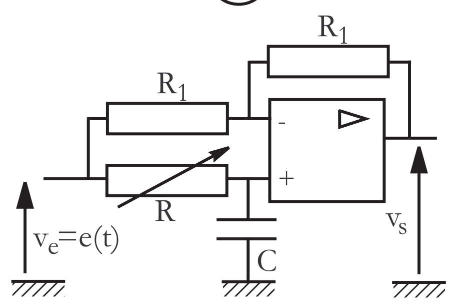
On considère les deux montages suivants alimentés par une tension alternative sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$. L'amplificateur opérationnel est idéal.



1) Dans le premier montage (avec pont), montrer que la tension entre M et N :

$$v = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$$

a une valeur efficace indépendante de ω.
Calculer le déphasage φ et donner ses variations en fonction de R.
2) Dans le second montage (avec AO), calculer la tension de sortie v_s.
En déduire la valeur efficace de cette tension et le déphasage φ par rapport à v_e.
3) Quel rôle jouent ces deux montages ?



Rép : 1) $v = u_{NM} = U_{NM}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\underline{U}_{NM} = \dfrac{1 - jRC\omega}{2(1 + jRC\omega)}\underline{E}$ soit :
$V = \dfrac{E}{2}$ et $\varphi = -2\arctan(RC\omega)$.
2) $\underline{V}_s = \dfrac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{V}_e$ soit : $V = E$ et $\varphi = -2\arctan(RC\omega)$.

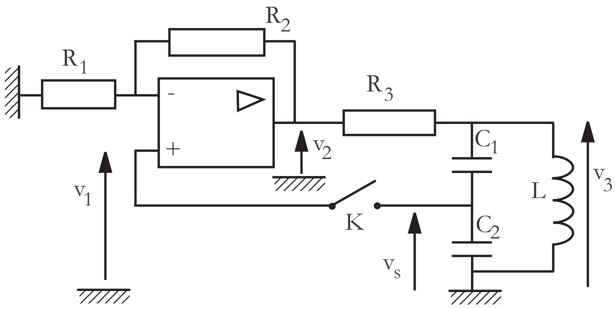
Ex-E5.18 **Oscillateur avec A.O.**

L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

1) K est ouvert. Exprimer (en supposant que les tensions existent et sont sinusoïdales) :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \quad ; \quad \frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_2} \quad ; \quad \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_3}$$

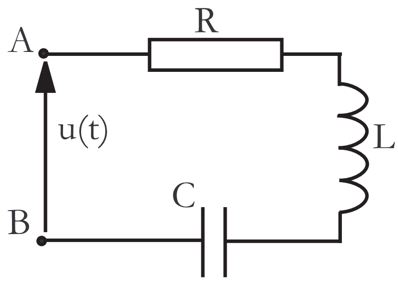
2) K est fermé. Déterminer les conditions pour que le montage soit un oscillateur de pulsation ω. Exprimer ω.



DL n°8 – RLC série : puissance et facteur de qualité

Un circuit (R, L, C) série est soumis à une tension alternative sinusoïdale définie par : $u(t) = U_0 \sin \omega t$.

On étudie le régime d'oscillations sinusoïdales forcées, à la pulsation ω.



1) La pulsation ω étant fixée, déterminer la puissance moyenne $< \mathcal{P} >$ dissipée par ce circuit par effet JOULE.

2) Pour quelle valeur ω_o de ω cette puissance est-elle maximale ? A quel phénomène physique correspond cette valeur ω_o ?

3) Déterminer les limites ω_{min} et ω_{max} de l'intervalle de pulsation sur lequel $< \mathcal{P} >$ est au moins égal à la moitié de sa valeur maximale $\mathcal{P}_0$.

En déduire l'expression du facteur $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_{max} - \omega_{min}}$ en fonction de L, R et ω_o.

Pour L et C fixés, comment Q varie-t-il avec R ?

Quel est l'intérêt d'un circuit possédant un facteur Q élevé ?

En déduire une justification de la dénomination : "facteur de qualité" du circuit.

4) Exprimer, en fonction de L, R et U_0, l'énergie électromagnétique moyenne $< \mathcal{E}_0 >$ stockée, pour la pulsation ω_o, dans la bobine ou le condensateur (vérifier que c'est la même).

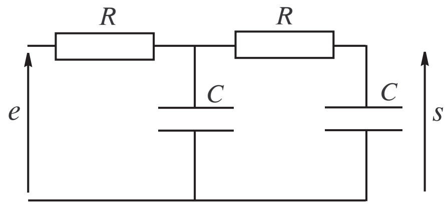
En déduire une relation entre Q, ω_o, $< \mathcal{E}_o >$ et $< \mathcal{P}_o >$. Retrouve-t-on, du point de vue énergétique, l'intérêt d'un circuit à Q élevé ?

■ Filtres (Quadripôles en Régime sinusoïdal)

E6

Pour les exercices suivants (**Ex-E6.1-3/5-6**), une méthode possible consiste à (notations de **Ex-E6.2**) :
- exprimer $\underline{Z}$, impédance correspondant à l'association d'impédance entre les bornes A et B
- exprimer $\underline{u}_{AB}$ en fonction de $\underline{e}$ (Diviseur de tension avec $\underline{Z}$ entre A et B)
- exprimer sur le schéma de départ $\underline{s}$ en fonction de $\underline{u}_{AB}$ (Diviseur de tension)
- de ces deux expressions, éliminer $\underline{u}_{AB}$ et en déduire $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

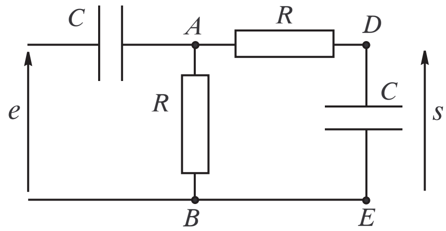
Ex-E6.1 Étant donné le circuit ci-contre en régime sinusoïal forcé :



1) Déterminer la fonction de transfert du filtre.
2) En déduire la gain en décibels (on posera $\tau = RC = 10^{-4}\ s$).
3) Calculer ω_c, la pulsation de coupure à $-3\ dB$.
4) Tracer G_{dB} en fonction de $\log(\omega\tau)$.

Rép : 1) $\underline{H} = \dfrac{1}{1 - R^2C^2\omega^2 + j3RC\omega}$; **3)** $\omega_c \simeq 3,74.10^3\ rad.s^{-1}$, soit : $f_c \simeq 596\ Hz$.

Ex-E6.2 On considère le schéma ci-contre :

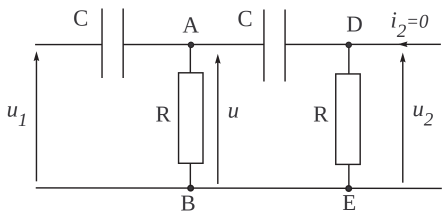


1) Établir la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = He^{j\varphi}$ en posant $X = RC\omega$.
2) Construire le(s) diagramme(s) de Bode ($G_{dB} = G_{dB}(\log X)$ et $\varphi = \varphi(\log X)$).

Rép : 1) $\underline{H} = \dfrac{jX}{1 - X^2 + 3jX}$; **2)** Filtre passe-bande de bande-passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{3}{RC}$.

Ex-E6.3 **Association en cascade de filtres d'ordre 1**

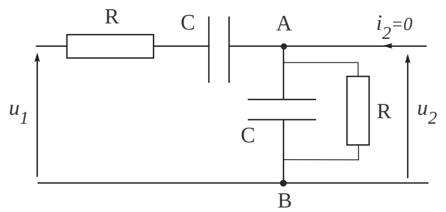
On considère les deux cellules CR du schéma ci-contre :



1) Établir la fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ en posant $X = RC\omega$.
2) Construire le(s) diagramme(s) de Bode ($G_{dB} = G_{dB}(\log X)$ et $\varphi = \varphi(\log X)$).
3) Déterminer la fonction de transfert de l'association de *trois* cellules CR.

Rép : 1) $\underline{H} = \dfrac{(jX)^2}{1 + \dfrac{jX}{Q} + (jX)^2}$ avec $Q = \dfrac{1}{3}$; **3)** $\underline{H} = \dfrac{(jX)^3}{1 + 5jX + 6(jX)^2 + (jX)^3}$.

Ex-E6.4 **Filtre de Wien**



1) Établir la fonction de transfert du filtre de Wien utilisé en sortie ouvert ($i_2 = 0$) et la présenter sous la forme :

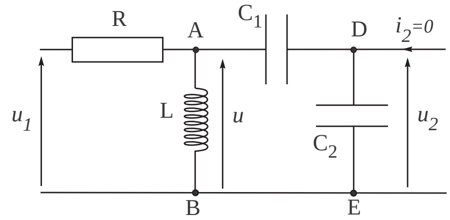
$$\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

Expliciter les caractéristiques ω_0, Q et K en fonction de ses composants R et C.
Quelle est la signification de chacune de ces caractéristiques ?

2) Tracer le diagramme asymptotique de Bode de ce filtre.

Rép : 1) $K = Q = \dfrac{1}{3}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$; **2)** $G_{dB}(\mathsf{ABF}) = 20\log K - 20\log Q + 20\log x = 20\log x$; $G_{dB}(\mathsf{AHF}) = 20\log K - 20\log Q - 20\log x = -20\log x$.

Ex-E6.5 Filtre de Colpitts



1) Établir la fonction de transfert du filtre de Colpitts utilisé en sortie ouvert ($i_2 = 0$) et la présenter sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

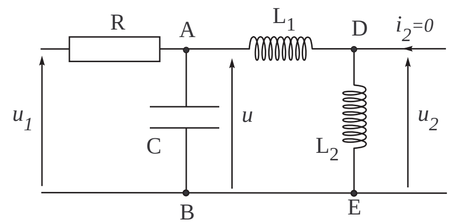
Expliciter les caractéristiques ω_0, Q et K en fonction de ses composants R, L, C_1 et C_2.

Quelle est la signification de chacune de ces caractéristiques ?

2) Tracer le diagramme asymptotique de Bode de ce filtre (pour $Q = 3$ et $Q = \dfrac{1}{3}$).

Rép : 1) $K = \dfrac{C_e}{C_2}$ avec $C_e = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$; $Q = RC_e\omega_0 = \dfrac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C_e}{L}}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC_e}}$.

Ex-E6.6 Filtre de Hartley



1) Établir la fonction de transfert du filtre de Hartley utilisé en sortie ouvert ($i_2 = 0$) et la présenter sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{K}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

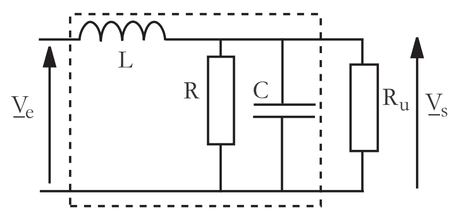
Expliciter les caractéristiques ω_0, Q et K en fonction de ses composants R, C, L_1 et L_2.

Quelle est la signification de chacune de ces caractéristiques ?

2) Tracer le diagramme asymptotique de Bode de ce filtre (pour $Q = 3$ et $Q = \dfrac{1}{3}$).

Rép : 1) $K = \dfrac{L_1}{L_2}$; $Q = RC\omega_0 = \dfrac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Ex-E6.7

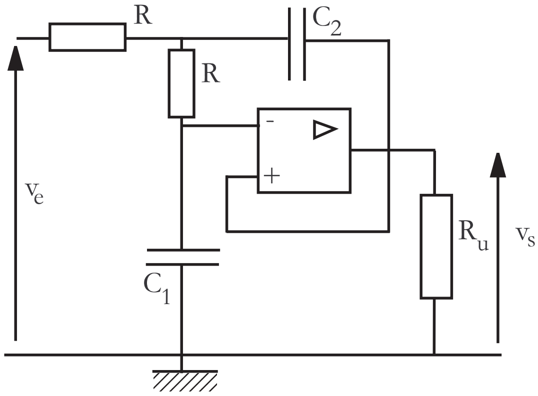


On considère le filtre ci-contre branché sur une résistance de charge R_u. Soit R_1 la résistance équivalente à R et R_u en parallèle.

1) Calculer la fonction de transfert : $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$.

2) On suppose R_u infini : comment faut-il choisir L et C en fonction de R et ω_0 pour que $|\underline{H}(j\omega)|$ soit de la forme : $|\underline{H}(j\omega)| = \left(1 + \dfrac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$?

On considère maintenant le deuxième filtre ci-contre où l'AO est idéal :



3) Calculer la fonction de transfert $\underline{H}'(j\omega)$ de ce filtre.

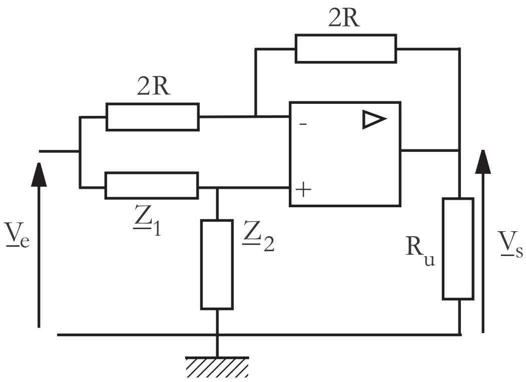
4) Comment choisir C_2 pour que $|\underline{H}'(j\omega)|$ soit de la forme :

$$|\underline{H}'(j\omega)| = \left(1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad ?$$

Quelle est alors la valeur de ω_0 ?

5) Quel est l'avantage de ce montage par rapport au précédent ?

Ex-E6.8 Filtres déphaseurs



1) Déterminer la fonction de transfert du filtre sachant que l'AO est idéal.

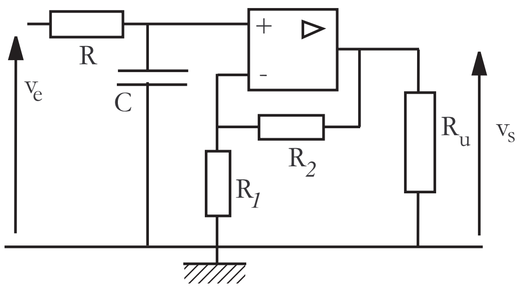
2) $\underline{Z}_1$ est une résistance R et $\underline{Z}_2$ un condensateur de capacité C.
→ Tracer le diagramme de Bode.

3) Même question en échangeant $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$.

Rép : 1) $\underline{H} = \dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \dfrac{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1}$; **2)** $\underline{H} = \dfrac{1 - jx}{1 + jx} = He^{j\varphi}$ avec $x = RC\omega = \dfrac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow G_{dB} = 0\ dB$ et $\varphi = -2\arctan x$; **3)** $G'_{dB} = 0\ dB$ et $\varphi' = \pi - 2\arctan x$.

Ex-E6.9

On associe un filtre passe-bas et un AO monté en amplificateur non inverseur (l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire).



1) Déterminer la fonction de transfert du filtre. En déduire sa pulsation de coupure ω_0 à $-3\ dB$ et son gain G_0 dans la bande-passante.

2) Tracer le diagramme de Bode.

3) Calculer les valeurs de C et R_2 pour que f_0, fréquence propre, soit $1\ kHz$ et $G_0 = 3\ dB$, avec $R = R_1 = 10\ k\Omega$.

Rép : 1) $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jx}$ avec $H_0 = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1}$, $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$; **3)** $C \simeq 16\ nF$ et $R_2 \simeq 4,1\ k\Omega$.

Ex-E6.10 Détermination d'une capacité inconnue

On a réalisé un filtre passe-bas à l'aide d'un condensateur de capacité C et d'une résistance $R = 1\ k\Omega$. La tension d'entrée a la valeur efficace $U_e = 6\ V$.

On a mesuré la tension de sortie U_s en fonction de la fréquence ; d'où le tableau suivant :

$f\ (Hz)$	200	500	1.10^3	2.10^3	5.10^3	1.10^4	2.10^4	4.10^4	1.10^5
$U_s\ (V)$	5,95	5,72	5,08	3,73	1,82	0,943	0,476	0,191	$95,5.10^{-3}$

1) Tracer le diagramme de Bode en gain de ce filtre (sur une feuille semi-logarithmique).

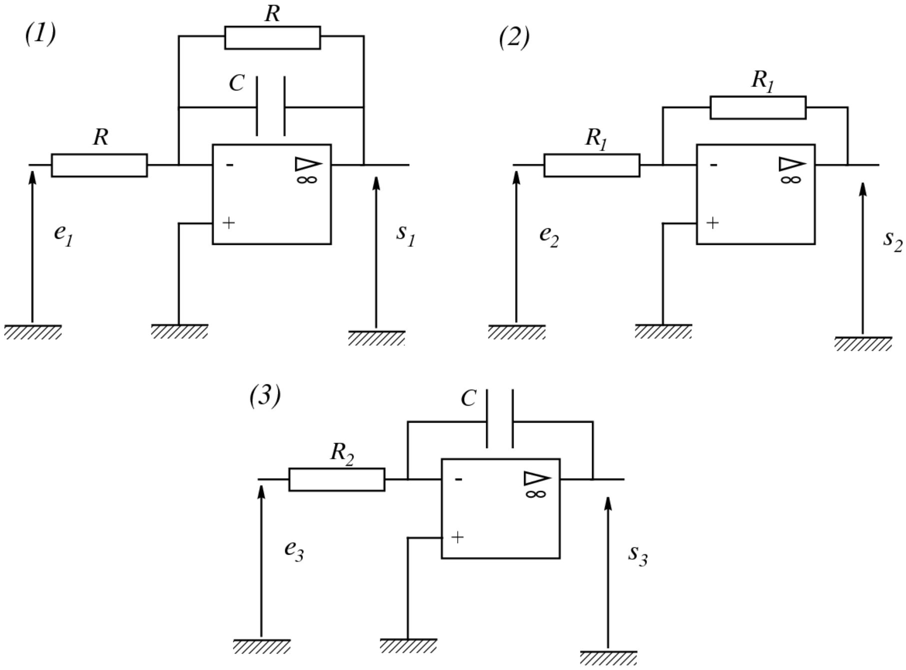
2) Déterminer la fréquence de coupure.

3) En déduire la capacité C du condensateur.

Ex-E6.11 (d'après ENSI)

Les amplificateurs opérationnels utilisés sont idéaux.

1) Déterminer les expressions de la fonction de transfert de chacun des circuits élémentaires suivants alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation ω :

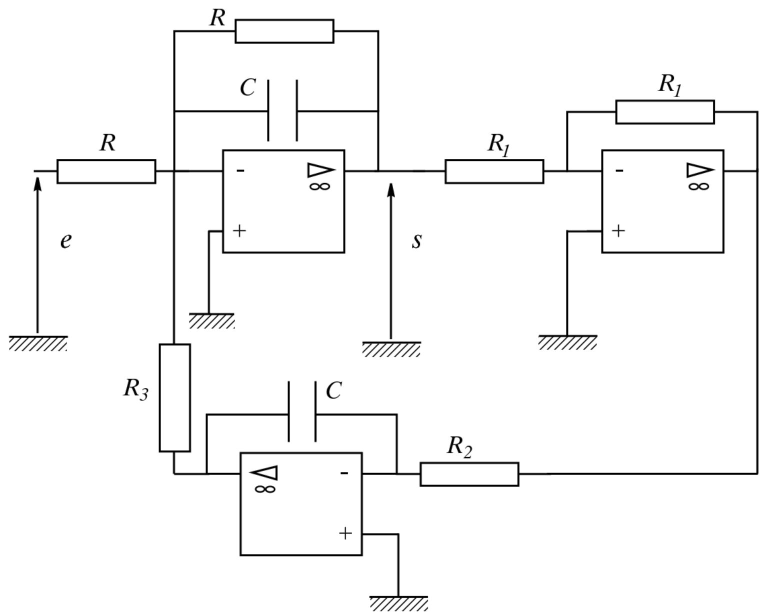


2) Ces montages sont associés pour constituer le filtre ci-dessous. En donner la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$.

3) Exprimer le gain en décibel en fonction de R, R_2, R_3 et de $x \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.
On aura au préalable calculé la pulsation de résonance ω_0.

4) Montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bande et en déterminer les fréquences de coupure.

5) Tracer la courbe $G_{dB} = f(x)$.



Rép : 1) $\underline{H}_1 = \dfrac{\underline{s}_1}{\underline{e}_1} = \dfrac{-1}{1 + jRC\omega}$; $\underline{H}_2 = \dfrac{\underline{s}_2}{\underline{e}_2} = -1$; $\underline{H}_3 = \dfrac{\underline{s}_3}{\underline{e}_3} = \dfrac{-1}{jR_2C\omega}$;

2) $\underline{H} = \dfrac{\underline{s}}{\underline{e}} = \dfrac{-1}{1 + j\left(RC\omega - \dfrac{R}{R_2R_3C\omega}\right)}$ de la forme $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$ avec $H_0 = -1$,

$x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, $Q = \begin{cases} RC\omega_0 \\ \dfrac{R}{R_2R_3C\omega_0} \end{cases}$ soit $\omega_0 = \dfrac{1}{C\sqrt{R_2R_3}}$ et donc $Q = \dfrac{R}{\sqrt{R_2R_3}}$.

3) $G_{dB} = 20\log H = -10\log\left[1 + \dfrac{R^2}{R_2R_3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right]$; **4)** $\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}$

5) $G_{dB}(\text{ABF}) = 20\log x - 10\log\dfrac{R^2}{R_2R_3} = 20\log x - 20\log Q$;

$G_{dB}(\text{AHF}) = -20\log x - 10\log\dfrac{R^2}{R_2R_3} = -20\log x - 20\log Q$.