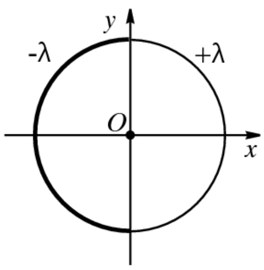
Exercices d'Électromagnétisme

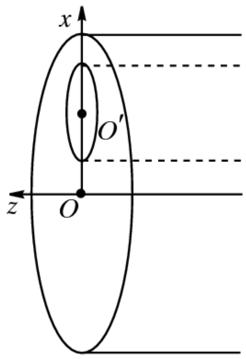
Aurores boréales sur l'Ersfjord, Kvaløya, à Tromsø, Norvège

■ Loi de Coulomb et champ électrostatique

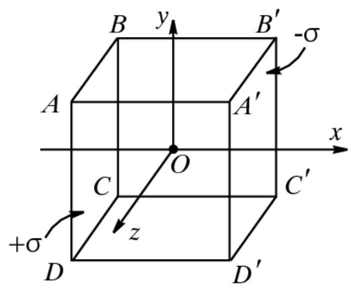
Ex-EM1.1 Quelles sont les symétries de la distribution circulaire ci-contre ?



EXEM1-1



EXEM1-2



EXEM1-3

Ex-EM1.2 Un cylindre infini d'axe (Oz) comportant une partie cylindrique évidée d'axe $(O'z)$ porte une charge volumique ρ uniforme.
Quelles sont les symétries de cette distribution de charges ?

Ex-EM1.3 Soit un cube d'arête a. Les côtés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ portent des charges surfaciques uniformes opposées $+\sigma$ et $-\sigma$. Quelles sont les symétries de cette distribution ?

Ex-EM1.4 Calculer le champ créé par un disque de rayon R portant la charge surfacique uniformément répartie de densité σ en un point de son axe (Oz) où O est le centre.

Ex-EM1.5 Soit une sphère de centre O et de rayon a portant des charges réparties uniformément en surface avec la densité surfacique σ.
1) Déterminer le champ au centre O de la sphère avec des considérations de symétrie.
2) Étudier le champ $\overrightarrow{E}$ en tous points extérieur à la sphère (orientation, variable dont $\overrightarrow{E}$ dépend).

Ex-EM1.6 Soit une spire circulaire de rayon R, d'axe (Oz), portant une densité linéique de charge λ constante.
Calculer le champ créé par cette répartition de charge en un point M de son axe à la distance z de la spire.

Ex-EM1.7 On considère la distribution de charge de l'exercice **Ex-EM1.1** et un point M de l'axe (Oz).
Déterminer la direction du champ créé en M. Calculer sa valeur.

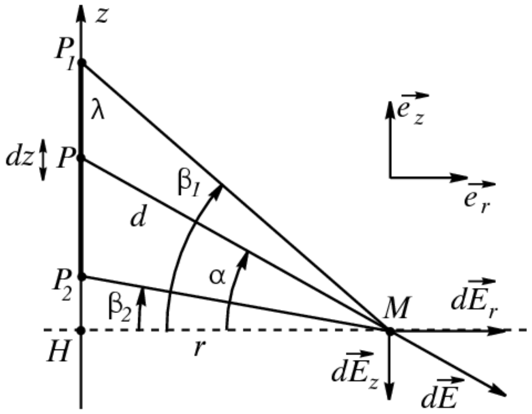
Ex-EM1.8 Calculer le champ au centre O du cube de l'exercice **Ex-EM1.3**.

Ex-EM1.9 **Champ créé par un segment chargé**

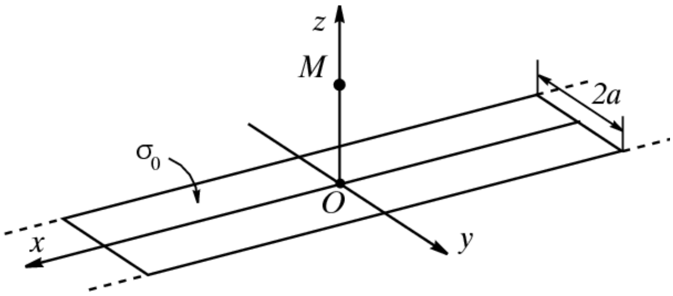
1) Calculer en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z) le champ créé par un segment de l'axe (Oz) de charge linéique uniforme λ, compris entre les points P_1 et P_2 d'abscisses z_1 et z_2 repérés par les angles β_1 et β_2. $\rightarrow$ **2)** Cas du fil infini uniformément chargé.

Ex-EM1.10 **Champ d'un ruban chargé**

Le ruban surfacique représenté sur le schéma est infini et porte une charge surfacique σ_0 uniforme. Calculer le champ électrostatique créé par le ruban au point $M(0, 0, z)$.



EXEM1-9



EXEM1-10

Ex-EM1.11 **Répartition surfacique de charges**

Deux sphères de même rayon R sont uniformément chargées en volume : l'une porte la densité de charge $-\rho$, l'autre, la densité de charge $+\rho$. Leurs centres O_1 et O_2 sont aux abscisses $-a$ et $+a$ sur l'axe Ox, avec $a \ll R$.

Montrer que l'on peut considérer que le système ainsi formé constitue approximativement une couche sphérique chargée surfaciquement, la densité de charge en un point M étant alors donnée par $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, où θ est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec $\overrightarrow{e_x}$, et σ_0 une constante que l'on exprimera en fonction des données.

Ex-EM1.12 **Tracé approché des lignes de champ** — *Cet exercice ne demande aucun calcul.*

Deux charges positives identiques q sont distantes de $2a$.

1) Quelle est la direction du champ $\overrightarrow{E}$ sur la droite qui joint les deux charges ?

2) Quelle est la direction du champ $\overrightarrow{E}$ dans le plan médiateur ?

3) Quelle est l'expression approchée du champ $\overrightarrow{E}$ à grande distance des deux charges ? (On suppose $r = ||\overrightarrow{OM}|| \gg a$, où O est le milieu du segment défini par les deux charges.)

4) Effectuer, finalement, un tracé approché des lignes de champ dans un plan contenant les deux charges ?

EM2

■ Potentiel électrostatique et Théorème de Gauss

Ex-EM2.1 **Demi-anneau chargé**

Un demi-anneau de rayon R porte une charge uniformément répartie avec la densité linéique λ. Soit Ox l'axe perpendiculaire au plan de l'anneau en son centre O.

1) Calculer le potentiel électrostatique créé en un point M de Ox, à la distance x de O.

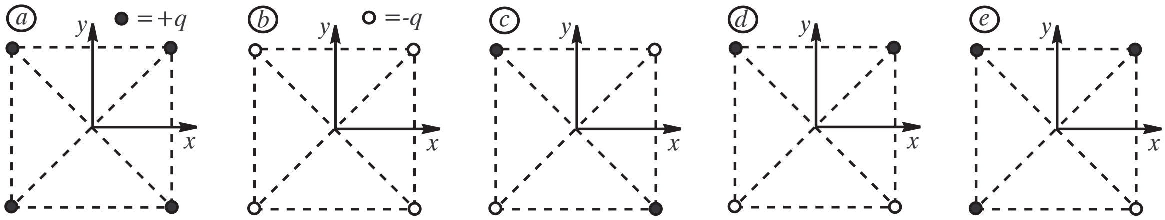
2) Calculer le champ électrostatique créé en un point M de Ox, d'abscisse x.

Ex-EM2.2 **Fil infini**

Déterminer le potentiel associé à un fil rectiligne infini portant la charge linéique uniforme λ.(cf. **Ex-EM1.9**).

Ex-EM2.3 Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge Q répartie avec la répartition surfacique $\sigma = f_1(\theta)\, f_2(\varphi)$ en coordonnées sphériques. Évaluer le potentiel créé par la sphère en son centre.

Ex-EM2.4 Soit 4 charges disposées au sommet d'un carré dont la longueur de la diagonale est $2a$. Calculer le champ électrostatique et le potentiel en O dans les cas suivants :



Ex-EM2.5 **Sphère uniformément chargée en surface** On considère une sphère de rayon R, de centre O, de densité de charge surfacique uniforme σ. On choisit $V(\infty) = 0$.
1) Calculer le potentiel en O.
2) Calculer le potentiel en un point M extérieur à la sphère ($OM = r > R$). Pour cela, on peut choisir la direction OM comme origine des angles et découper la sphère en zones couronnes "vues du centre" entre les angles θ et $\theta + d\theta$. Exprimer alors V à l'aide d'une intégrale élémentaire portant sur x, puis la calculer.
3) Reprendre le calcul précédent en supposant cette fois que le point M est à l'intérieur de la sphère. Vérifier ainsi directement que V est continu à la traversée de la surface et est constant à l'intérieur de la sphère.

Ex-EM2.6 **Nappe plane infinie et uniforme**
1) Donner l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ créé par une nappe plane infinie de densité de charge surfacique σ uniforme.
2) Reprenant l'expression du champ électrostatique créé sur son axe par un disque de rayon R de charge surfacique σ uniforme (cf. **Ex-EM1.4**), évaluer la hauteur h maximale pour laquelle nous pouvons assimiler le disque à un plan infini sans commettre une erreur relative supérieure à 1% pour le calcul du champ.

Ex-EM2.7 **Cylindre infini uniformément chargé en surface**
Déterminer le champ électrostatique créé par un cylindre infini de rayon R, de charge surfacique uniforme σ. En déduire le potentiel.

Ex-EM2.8 **Sphère uniformément chargée en surface**
Déterminer le champ électrostatique puis le potentiel créés par une sphère de centre O, de rayon R et de densité de charge surfacique σ uniforme. (Sa charge sera notée $q = 4\pi\, R^2\, \sigma$).

Ex-EM2.9 **Sphère chargée en surface**
Deux sphères de même rayon R sont uniformément chargées en volume : l'une porte la densité de charge $-\rho$, l'autre, la densité de charge $+\rho$. Leurs centres O_1 et O_2 sont aux abscisses $-a$ et $+a$ sur l'axe Ox, avec $a \ll R$.
1) Montrer que l'on peut considérer que le système ainsi formé constitue approximativement une couche sphérique chargée surfaciquement, la densité de charge en un point M étant alors donnée par $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, où θ est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec $\overrightarrow{e_x}$, et σ_0 une constante que l'on exprimera en fonction des données.
2) En déduire le champ à l'intérieur d'une couche sphérique chargée en surface suivant la loi $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, où σ est une constante et où θ a la même signification que dans 1).

Ex-EM2.10 **Cavité dans une boule uniformément chargée**
Une boule de rayon a de centre O_1 portant la charge volumique uniformément répartie ρ possède une cavité sphérique de rayon b de centre O_2 vide de charges. Déterminer le champ dans la cavité.

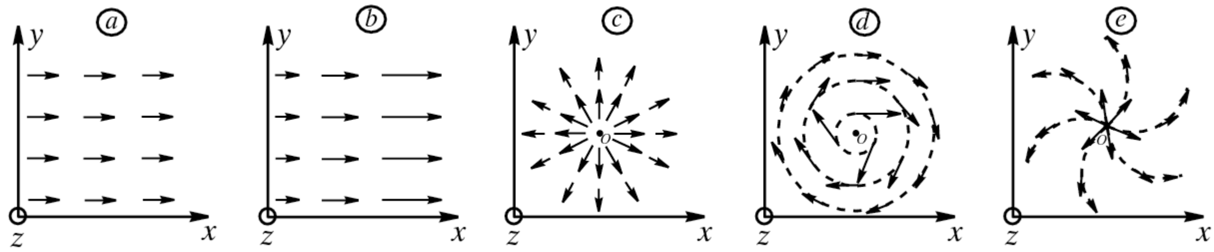
Ex-EM2.11 **Détermination d'une répartition de charges**
On considère une répartition volumique de charges électriques présentant la symétrie sphérique, contenue à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon R. Soit M un point intérieur à la sphère (on pose $OM = r < R$).
Déterminer cette répartition caractérisée par la densité volumique $\rho(r)$ pour que le champ à l'intérieur de la sphère soit de la forme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e_r}$.
Calculer la charge totale Q de la sphère et caractériser le champ à l'extérieur de la sphère.

Ex-EM2.12 **Nuage électronique et énergie d'ionisation**
Un système de charges crée le potentiel à symétrie sphérique :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(1+\frac{r}{a}\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \qquad \text{avec} q > 0$$

Calculer $Q(r)$, charge comprise dans la sphère de rayon r.
Caractériser la distribution de charges correspondant à ce potentiel (densité volumique ; singularité).
Définir, puis exprimer l'énergie de liaison de ce système.

Ex-EM2.13 On considère les lignes de champ représentées ci-dessous pour des champs dans le plan. Préciser pour chacun de ces champs s'il peut s'agir de champs électrostatiques et l'emplacement éventuel de charges électriques.



Ex-EM2.14 **Cylindre infini non uniformément chargé**
Un cylindre infini, d'axe $\Delta = Oz$ et de rayon R, porte une charge répartie en volume de manière non uniforme. En un point P du cylindre situé à une distance $r < R$ de l'axe Δ, la densité volumique de charge s'écrit $\rho = K\,r$, où K est une constante.
1) Déterminer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace.
2) Calculer le potentiel électrostatique V en tout point M de l'espace en faisant un choix judicieux de la constante du potentiel.

■ Dipôle électrostatique et moment dipolaire électrostatique

EM3

Ex-EM3.1 **Interaction d'une spire et d'un dipôle**
Un cerceau de rayon R de centre O et d'axe horizontal Oz porte la charge linéique λ uniforme.
1) Calculer le champ électrostatique créé par le cerceau sur son axe.
2.a) En utilisant une surface de Gauss ayant la forme d'un petit cylindre d'axe Oz, de rayon r et de hauteur dz, montrer que la composante radiale du champ E_r est liée à la valeur du champ sur l'axe par :

$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dE_z(0,z)}{dz}$$

2.b) Considérant un petit contour rectangulaire $ABCD$ de côtés r et dz avec $AB = dz$ appartenant à Oz, évaluer :

$$E_z(z,r) - E_z(0,z)$$

2.c) Calculer alors le champ électrostatique à l'ordre 1 en r au voisinage de l'axe Oz.
3) Quelles sont les actions mécaniques exercées par la spire sur un dipôle électrostatique rigide au voisinage de l'axe ?

→ On proposera trois méthodes pour effectuer ce calcul, en appelant $\alpha \equiv (\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{p})$.
4) On prend désormais $\alpha = 0$. Le dipôle peut coulisser sans frottement sur l'axe horizontal Oz.
→ Déterminer la ou les positions d'équilibre. Discuter leur stabilité et calculer éventuellement la période des petites oscillations du dipôle de masse m le long de l'axe.

Ex-EM3.2 Modèle de Thomson et polarisation induite
Dans le modèle de l'atome de JJ Thomson, un atome d'hydrogène est représenté par un noyau de charge e occupant une sphère de rayon R avec une densité de charge constante. L'électron de charge $-e$ se déplace à l'intérieur de cette sphère.
1) Quelle est la force subie par l'électron ? Quelle est sa position d'équilibre ?
2) On applique un champ $\overrightarrow{E_0}$ uniforme et on suppose que le noyau reste immobile. Quelle force supplémentaire entraîne ce champ ?
En admettant que ce champ est seul responsable de la polarisation de l'atome, montrer que le moment dipolaire peut se mettre sous la forme $\overrightarrow{p} = \alpha\, \epsilon_0\, \overrightarrow{E_0}$.
→ α est la polarisation de l'atome. Quelle est sa dimension, quelle est son ordre de grandeur ?
3) Pour quelle valeur de E_0, l'atome est-il ionisé ?

Ex-EM3.3 Répartition surfacique de dipôles
Un disque de rayon R est tapissé de dipôles, de sorte que la densité de moment dipolaire $\mu = \frac{dp}{dS}$ soit constante. La direction des dipôles est normale au plan du disque.
1) Calculer le champ et le potentiel sur l'axe, à la distance x du centre O du disque. Obtenir les expressions valables quel que soit le signe de l'abscisse x.
2) Tracer les graphes correspondants et faire les remarques paradoxales qui s'imposent. Explications ?

Ex-EM3.4 **D**éterminer l'ensemble des points M pour lesquels le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle est perpendiculaire au moment dipolaire $\overrightarrow{p}$.

Ex-EM3.5 Dipôle placé dans un champ électrostatique extérieur
Soit un champ uniforme $\overrightarrow{E_0} = E_0\overrightarrow{e_x}$ créant en un point O un potentiel V_0. En ce même point O, on place un dipôle de moment dipôlaire $\overrightarrow{p}$ parallèle à $\overrightarrow{E_0}$ et de même sens.
1) Calculer le potentiel créé en un point M à grande distance.
2) En déduire qu'il existe une équipotentielle sphérique dont on déterminera le rayon.
3) Calculer le champ en M.

Ex-EM3.6 Force d'intéraction entre deux dipôles
Soit un dipôle de centre O_1 de moment dipolaire $\overrightarrow{p_1}$. En un point O_2 de la droite portant $\overrightarrow{p_1}$, on place un second dipôle de moment dipôlaire $\overrightarrow{p_2}$ parallèlement à $\overrightarrow{p_1}$. Soit D la distance O_1O_2 et soit $a \ll D$ la distance entre les deux charges du second dipôle.
1) Déterminer la force exercée par le premier dipôle sur le second, les deux dipôles étant supposés permanents.
2) Reprendre le calcul en supposant que le premier dipôle est un dipôle permanent et que le second est un dipôle induit de polarisabilité égale à α.

■ Énergie électostatique

EM4

Ex-EM4.1 Deux dipôles en interaction
Soit un dipôle $\overrightarrow{p_1}$ placé en O et un dipôle $\overrightarrow{p_2}$ au point M tel que $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$. Le dipôle $\overrightarrow{p_1}$ crée le champ $\overrightarrow{E_1}$, le dipôle $\overrightarrow{p_2}$ crée le champ $\overrightarrow{E_2}$.
1) Quelle est l'énergie potentielle d'interaction des deux dipôles ?
2) Quelle est la force subie par $\overrightarrow{p_2}$ de la part de $\overrightarrow{p_1}$?

Ex-EM4.2
1) Déterminer le moment exercé par le champ d'un fil rectiligne infini (→ **EXEM1.9**) de charge linéique λ uniforme sur un dipôle rigide $\overrightarrow{p}$ placé en M de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z=0)$. On prendra $\overrightarrow{p}$ dans le plan d'équation $z=0$ et faisant l'angle α avec le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ en M.
2) Calculer la force subie par $\overrightarrow{p}$ à l'aide de l'énergie potentielle électrique. Montrer qu'on obtient le même résultat en utilisant l'expression $\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{grad})\,\overrightarrow{E}$.

Ex-EM4.3
1) Les solides et les liquides ont une masse volumique de l'ordre du $kg.dm^{-3}$. En supposant que les atomes se touchent en déduire la dimension de l'atome. On donne le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,022.10^{23}\ mol^{-1}$.
2) L'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène est $13,6\ eV$.
Cette énergie est-elle d'origine gravitationnelle ($\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ SI$ et $m_{\text{proton}} = 2000\, m_{\text{électron}}$) ou électromagnétique ?
On définira l'énergie d'interaction gravitationnelle par analogie avec l'énergie d'interaction électrostatique.
On donne $m_e = 9,1.10^{-31}\ kg$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$.

Ex-EM4.4 **Énergie potentielle de quatre charges ponctuelles**
Quatre charges identiques q sont placées aux quatre sommets d'un carré de côté a.
→ Quelle est l'énergie potentielle électrostatique de ce système ?

EM5

■ Champ magnétique et loi de Biot et Savart

Ex-EM5.1 **U**n fil de cuivre (masse volumique $\mu = 8,9.10^3\ kg.m^{-3}$, masse molaire $M = 63,6\ g.mol^{-1}$) cylindrique de rayon $1\ mm$ est parcouru par un courant continu d'intensité $I = 1,5\ A$.
Sachant que chaque atome de cuivre a un électron de conduction, calculer la vitesse d'ensemble des électrons.

Ex-EM5.2 **Sphère chagée en surface en rotation**
Une sphère de rayon R, de charge Q répartie en surface uniformément avec la densité σ tourne autour d'un axe passant par son centre O à la vitesse angulaire ω.
→ Déterminer le vecteur densité surfacique de courant en chaque point et le courant I parcourant un demi-cercle méridien liant les deux points fixes de la sphère tournante.

Ex-EM5.3 **Modélisation surfacique de courants**
Le demi-espace $z > 0$ est rempli par un milieu conducteur parcouru par des courants volumiques de densité

$$\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j_0} \exp -\frac{z}{\delta}$$

où δ est une longueur.
→ Calculer la densité surfacique de courant équivalente lorsque $\delta \to 0$ avec $\delta\, j_0$ constant.

Ex-EM5.4 **S**oit une spire de rayon R, d'axe (Oz) parcourue par le courant I. Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution ?

Ex-EM5.5 **L**e plan P infini d'équation $y = 0$ est parcouru par des courants surfaciques de densité $\overrightarrow{j_s} = j_0\, \overrightarrow{e_x}$.
Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution ?

Ex-EM5.6 **O**n considère un demi-cylindre creux d'axe (Oz) parcouru par des courants surfaciques de densité $\overrightarrow{j_s} = j_0\, \overrightarrow{e_z}$.

Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution ?

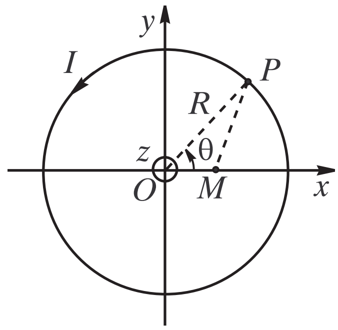
Ex-EM5.7 **S**oit une distribution de courant volumique possédant un plan de symétrie (Π). Montrer à partir de la loi de Biot et Savart que pour $M' = Sym_{(\Pi)}(M)$ symétrique de M par rapport à (Π), on a $\overrightarrow{B}(M') = -Sym_{(\Pi)}(\overrightarrow{B}(M))$.

Ex-EM5.8 **Disque de Rowland**
Un disque métallique de rayon R chargé uniformément en surface avec la densité σ tourne autour de son axe (Oz) à la vitesse angulaire ω.
$\rightarrow$ Calculer le champ $\overrightarrow{B}$ créé en un point M de l'axe (Oz).
Cette expérience est connue sous le nom d'expérience du *disque de* Rowland.
On fera l'application numérique pour $\sigma = 5.10^{-6}\ C.m^{-2}$; $R = 10\ cm$; $\omega = 60\ tr.s^{-1}$ et à une distance $z = 2\ cm$.

Ex-EM5.9 **Champ magnétostatique dans le plan d'une spire**

Une spire de centre O et de rayon R est parcourue par le courant I.
1) Montrer que le champ $\overrightarrow{B}$ en un point M du plan de la spire tel que $OM = r \ll R$ est normal au plan de la spire.
2) Exprimer $B(M)$ sous forme d'une intégrale en utilisant l'angle θ. Montrer que pour $r \ll R$, on a :

$$B(M) \simeq \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{3r^2}{4R^2}\right)$$



Ex-EM5.10 **Bobines de Helmholtz**
Deux bobines de N spires, de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I, ont leurs centres distants de R. Le sens du courant est tel que les champs créés par les deux bobines s'ajoutent sans l'espace situé entre les deux bobines.

1) Schéma. Calculer $\overrightarrow{B}$ au milieu O de l'axe (Ox) joignant les deux centres.
2) Calculer $\overrightarrow{B}$ pour un point M de l'axe voisin de O repéré par $OM = x$.
(Il faudra courageux et effectuer un DL à l'ordre 4 en $\frac{x}{R}$.)
3) Quelle est la variation relative de B entre O et M pour $\frac{x}{R} = 0,1$?

Ex-EM5.11 **Champ magnétique créé par un électron classique**
Montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par un électron décrivant un cercle de rayon $a = 0,053\ nm$ autour d'un proton au point où est placé le proton a pour intensité :

$$B = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^2 c}{\sqrt{m a^5}}$$

(avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.)

Ex-EM5.12 **relation entre le champ électrique et le champ magnétique**
Soit une charge ponctuelle q placée en un point M animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans R. Elle crée en P tel que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{r}$ un champ $\overrightarrow{E}$ et un champ $\overrightarrow{B}$.
En admettant que $\overrightarrow{E}$ a la même expression qu'en électrostatique, trouver la relation qu'il y a entre $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{v}$.