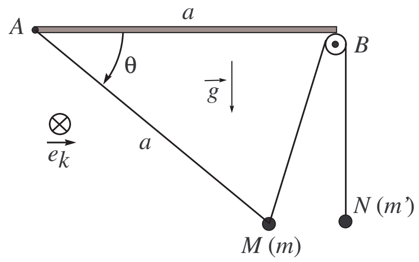
Ex-M6.1 **Moments des forces et condition d'équilibre** [d'après Concours Mines-Ponts]

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à une socle horizontal AB (de longueur a), et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions.
En un point M, tel que $AM = a$, est fixée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N.
Le dispositif est placé verticalement dans le champs de pesanteur $\overrightarrow{g}$.



1) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A ; le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera : $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.
2) Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer, quand il existe, l'angle d'équilibre θ_e, en fonction de m et m'.

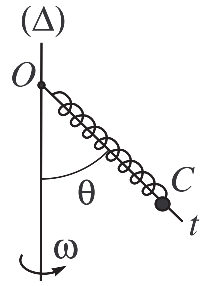
Ex-M6.2 **Modèle atomique de Thomson**

En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON *proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O, de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge $-e$.*
Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est assimilé un référentiel galiléen.
En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.
Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O.
À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \overrightarrow{OM_0} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}(t = O) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$.
Données : $m = 9,11.10^{-31}\ kg$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ uSI$
Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.
Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en O, d'axes de symétrie Ox et Oy : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0, v_0 et m.
En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).
Rq : La position de M est donc repérée dans les bases $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ avec comme vecteurs positions respectifs : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ (pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$).
2) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0, e, m et R. Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de LYMAN de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121,8\ nm$).
3) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de HOOKE) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.
4) À quelles condition cette trajectoire est-elle circulaire ? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?
5) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h, cœfficient de freinage, est positif.
Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps ?
Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.
Commenter quant à la stabilité de l'atome.

Ex-M9.1 Dynamique en référentiel non galiléen

On dispose d'un ressort à spires non jointives, de longueur au repos l_0 et de raideur k. On négligera la masse du ressort dans tout l'exercice proposé. On enfile ce ressort sur une tige Ot, soudée en O à un axe vertical (Δ) et inclinée obliquement par rapport à la verticale descendante d'un angle θ ($\theta < 90°$).
Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre on accroche un corps C, de masse m, coulissant sans frottements sur Ot.
L'ensemble tourne autour de Δ à la vitesse angulaire constante ω. le ressort n'oscille pas et a une longueur constante l.



1) Préciser la trajectoire décrite par C dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$.
2) Exprimer la longueur l du ressort en fonction de m, g, θ, k, l_0 et ω(après avoir défini le référentiel $\mathcal{R}$ adapté au problème). Quelle condition sur ω en découle ?
3) Exprimer, littéralement, l'intensité R de la force exercée par la tige sur C en focntion de m, g, θ, ω et l que l'on considérera comme un paramètre commode pour ne pas surcharger l'expression littérale de R.

Ex-M10.1 Mouvement d'une planète autour du Soleil

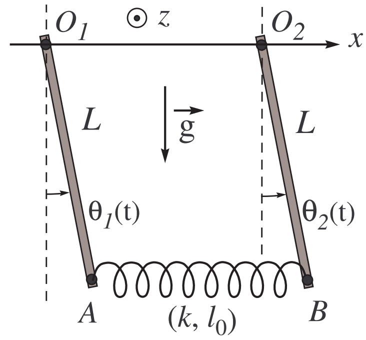
Une Planète, de masse m, gravite autour du Soleil de masse $M \gg m$. On travaille dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, supposé galiléen, centré sur le centre d'inertie G du système $\mathcal{S} = \{S, P\}$. Dans ce référentiel, la réduction canonique permet l'étude du mouvement d'un point fictif, de masse μ, repéré par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK}$, de vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{K/\mathcal{R}^*}$ et soumis à la force $\overrightarrow{f}$.
1) Expliciter μ, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{f}$ en fonction des données de l'énoncé.
2) Dans $\mathcal{R}^*$, le moment cinétique du système en G vaut : $\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{L}_{G/\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L}_{G/\mathcal{R}^*}(K) = \overrightarrow{r} \times \mu\overrightarrow{v}$. Démontrer que $\overrightarrow{L^*}$ est constant et en déduire que le mouvement de K dans $\mathcal{R}^*$ est plan. On notera $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan.

On définit le vecteur $\overrightarrow{C} = \dfrac{\overrightarrow{L^*}}{\mu}$ de norme C. Exprimer $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, la vitesse angulaire de rotation de K, en fonction de C et de r.
3) Démontrer qu'en coordonnées polaires, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_{K/\mathcal{R}^*}$, l'accélération de K dans $\mathcal{R}^*$ peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{a} = -C^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\overrightarrow{e_r} \quad \text{avec } u = \frac{1}{r}$$

En déduire un équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par u.
4) À l'aide de la question précédente, montrer que r peut s'écrire : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, où e est l'excentricité du mouvement de K, et p un paramètre, dont on donnera l'expression en fonction de μ, C, $\mathcal{G}$, M, et m.
5) Pour quelles valeurs de e la trajectoire est-elle elliptique ? Montrer qu'alors le demi-grand axe a de l'ellipse vaut $a = \dfrac{p}{1 - e^2}$.
6) On rappelle que si K décrit une ellipse, la surface S de celle-ci vaut $S = \pi.a.b$ avec b le demi-petit axe de l'ellipse. On appelle T la période de rotation du système autour de G et on rappelle que $p = \dfrac{b^2}{a}$.
En déduire la troisième loi de Képler. Commenter ce résultat.

Ex-M12.1 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

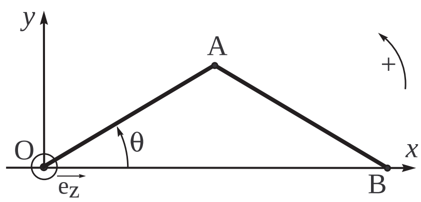


On considère le système constitué par l'ensemble de deux tiges identiques, de longueur L, de masse m et d'un ressort idéal, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.
On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Les tiges peuvent tourner, par l'intermédiaire de liaisons pivots parfaites, autour des axes O_1z et O_2z fixes (perpendiculaires au plan de la figure).
On repère les positions de ces dernières par les angles θ_1 et θ_2.
Les extrémités opposées des tiges sont liées par le ressort. Lorsque les angles sont nuls, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.
On suppose qu'au cours du mouvement ce dernier reste constamment horizontal.
À $t = 0$ on écarte les tiges des angles θ_{10} et θ_{20}, et on les abandonne sans vitesse intitiale.
On posera $\omega_1^2 = \dfrac{3k}{m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{3g}{2L}$. On donne le moment d'inertie de chaque tige par rapport à son axe de rotation : $J = \dfrac{mL^2}{3}$.

1) Au cours du mouvement, exprimer l, longueur approximative du ressort à l'instant t, en fonction de l_0, L, θ_1 et θ_2.
2) Déterminer deux équations différentielles couplées liant θ_1 et θ_2.
3) Dans le cas où $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$, exprimer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
4) Dans le cas où $\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$, exprimer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

Ex-M12.2 Éléments cinétiques de deux tiges articulées :

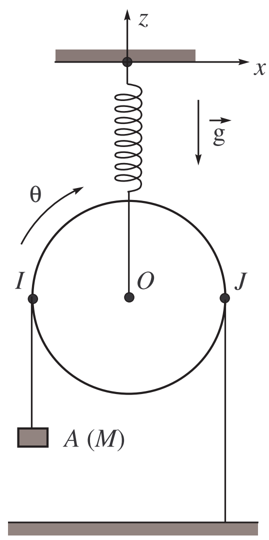
Deux tiges homogènes OA et AB de même longueur a, de même masse m sont mobiles dans le plan (Oxy). L'extrémité O est fixe, l'extrémité B est assujettie à glisser sur (Ox) et les deux tiges sont articulées en A. Quels sont, dans le repère $\mathcal{R} = (Oxy)$ le moment cinétique en O et l'énergie cinétique du système ?



Ex-M12.3 Demi-boule (QC)

Considérons une demi-boule homogène de rayon R caractérisée par la masse volumique ρ.
Déterminer sa masse m et la position de son centre d'inertie G.

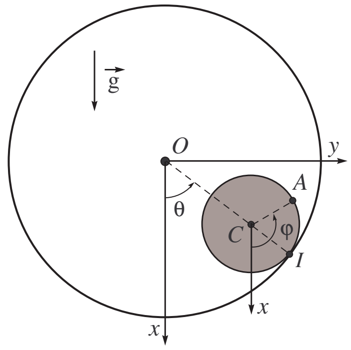
Ex-M12.4 Période des oscillations d'une masse



Un masse M (assimilable à un point matériel A) est suspendue à un fil passant par une poulie de masse m, de rayon R.
On note $J_{Oy} = \dfrac{mR^2}{2}$, le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe Oy passant par O et perpendiculaire au plan de la poulie.
On admettra que le fil ne glisse pas sur la poulie.
La poulie est suspendue par son centre à un ressort de constante de raideur k, et de longueur à vide l_0.
On néglige les frottements. On appelle z et Z, respectivement, les écarts de la masse M et de la poulie par rapport à leur position d'équilibre.

1) Donner l'énergie mécanique du système en fonction de z et de $\dot{z}$ (on n'explicitera pas l_e, longueur à l'équilibre du ressort).
2) Donner la période des petites oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

Ex-M12.5 **Période des oscillations d'une masse**



Un disque $\mathcal{D}$ de masse m, de rayon a et de centre C, peut rouler, dans un plan vertical Oxy, à l'intérieur d'un cylindre de centre O et fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$.
On note $b = OC$ la distance de O à C.
$\mathcal{D}$ est homogène de moment d'inertie $J = \dfrac{1}{2}ma^2$ par rapport à son axe Cz.
Le cœfficient de frottement entre le cylindre et le disque est f.
Ox est l'axe vertical, le chap de pesanteur g est uniforme.
On appelle θ, l'angle entre $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{Oc}$, et φ celui entre $\overrightarrow{e_x}$ et la direction $\overrightarrow{CA}$ où A est un point périphérique de $\mathcal{D}$.
On suppose que $\mathcal{D}$ peut rouler dans glisser dans le cylindre. En outre, l'angle θ reste faible.

1) Déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ de $\mathcal{D}$ en imposant $\mathcal{E}_p(0) = 0$. En donner une expression approchée au deuxième ordre en θ.

2) Établir la relation liant $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.

3) L'énergie mécanique du disque est-elle conservée ? Pourquoi ?

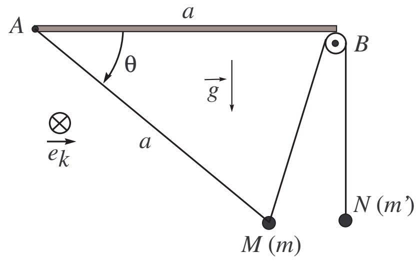
4) Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $\theta(t)$. La résoudre avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

5) Pour la solution précédente, calculer les valeurs moyennes de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Que constate-t-on ?

6) Application numérique : $\theta_0 = 0,1\ rad$; $m = 160\ g$; $g = 10\ m.s^{-2}$, $b = 20\ cm$. Calculer l'énergie cinétique moyenne de $\mathcal{D}$.

Ex-M6.1 Moments des forces et condition d'équilibre [d'après Concours Mines-Ponts]

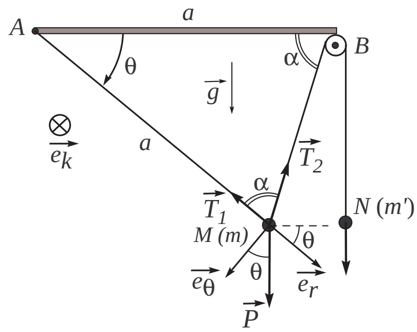
Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à une socle horizontal AB (de longueur a), et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions.
En un point M, tel que $AM = a$, est fixée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N.
Le dispositif est placé verticalement dans le champs de pesanteur $\overrightarrow{g}$.



1) Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A ; le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera : $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.
2) Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer, quand il existe, l'angle d'équilibre θ_e, en fonction de m et m'.

➤ Solution

1) • On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le système $\{M, m\}$ est soumis :
- à son poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
- à la tension $\overrightarrow{T_1}$ de la portion de fil AM, orientée de M vers A : $\overrightarrow{T_1} = -T_1\overrightarrow{e_r}$ (avec $T_1 = \| \overrightarrow{T}_1 \|$)
- à la tension $\overrightarrow{T_2}$ de la portion de fil MB, orientée de M vers B : $\overrightarrow{T_2} = T_2\overrightarrow{e}_{M\to B}$ (avec $T_2 = m'g$ car la poulie étant parfaite et le fil étant tendu, l'intensité du poids qui s'exerce en N est intégralement transmise en M).



• Chacune de ces forces présente, en A, un moment calculable dès que l'on s'est fixé une base orthonormée directe de l'espace – $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e}_k)$ par exemple.
• Pour le poids, ce moment vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{P} = AM.P.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\,\overrightarrow{e}_k \;\Rightarrow\; \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) = mga\cos\theta\,\overrightarrow{e}_k}$$

• Puisque $\overrightarrow{T_1}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AM}$, son moment est nul : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_1}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{0}}$

• Pour la tension $\overrightarrow{T_2} = m'g\,\overrightarrow{e}_{M\to B}$, avec le vecteur $\overrightarrow{e}_{M\to B}$ contenu dans le plan du dessin et faisant un angle $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ (puisque AMB est isocèle en A) avec le vecteur $-\overrightarrow{e_r}$:

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{T_2} = \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e}_k)} \times \begin{vmatrix} -m'g\cos\alpha \\ -m'g\sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -m'ga\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \end{vmatrix}$$

Soit : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = -m'ga\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\,\overrightarrow{e}_k}$

2) • Le point M est soumis à une force résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$ dont le moment en A vaut :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{P}) + \cancel{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_1})} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{T_2}) = \left[mga\cos\theta - m'ga\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\,\overrightarrow{e}_k$$

Le point M est à l'équilibre à condition que $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$ (aucune rotation de M autour de A), ce qui revient à imposer :

$$m\cos\theta - m'\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2m\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - m'\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - m = 0$$

rappel de Trigo : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, qu'on utilise ici en posant $x = \dfrac{\theta}{2}$.

• Par conséquent, étudier l'équilibre de M revient à résoudre un polynôme de degré 2 :

$$2mX^2 - m'X - m = 0 \quad \text{avec } X \equiv \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Le discriminant de ce polynôme est : $\Delta = m'^2 + 8m^2 > m'^2 > 0$. Il existe donc deux solutions réelles :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} > 0 \qquad \text{et} \qquad X_2 = \frac{m' - \sqrt{\Delta}}{4m} < 0$$

Puisque θ est nécessairement compris entre 0 et π, on a $\dfrac{\theta}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) > 0$.
On en déduit que X_2 n'a pas de signification physique et que l'unique solution est X_1 :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}}$$

Sachant que cette solution n'a de sens que pour $X_1 = \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) < 1$, on doit vérifier l'inégalité suivante :

$$m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2} \leq 4m \quad \Leftrightarrow \quad m'^2 + 8m^2 \leq 16m^2 - 8mm' + m'^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8m(m - m') \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{m \geq m'}$$

Ex-M6.2 Modèle atomique de Thomson

En 1904, le physicien anglais Joseph John Thomson *proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O, de rayon R et de charge +e uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge −e.*

Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est assimilé un référentiel galiléen.

En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.

Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O.

À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \overrightarrow{OM_0} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}(t = O) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$.

Données : $m = 9,11.10^{-31}\ kg$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ uSI$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.

Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en O, d'axes de symétrie Ox et Oy : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0, v_0 et m.

En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).

Rq : La position de M est donc repérée dans les bases $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ avec comme vecteurs positions respectifs : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ (pour $r = \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$).

2) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0, e, m et R. Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de Lyman de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121,8\ nm$).

3) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de Hooke) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.

4) À quelles condition cette trajectoire est-elle circulaire ? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

5) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h, cœfficient de freinage, est positif.

Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps ?

Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.

Commenter quant à la stabilité de l'atome.

➤ Solution

• Système étudié : $\{M, m, -e\}$, électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g$.

• Bilan des forces : le poids et l'interaction électrostatique exercée par le proton (O). Le poids étant négligeable devant cette dernière force, on a : $\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.

• Cette force est centrale, donc $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

1) • Le théorème du moment cinétique pour M appliqué en O point fixe du référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{Cste}$$

• Le moment cinétique étant un vecteur constant, ce vecteur se calcule en considérant un instant particulier pour lequel on connaît les expressions du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et de la vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}$.

C'est le cas à $t = 0$: $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM_0} \times m\overrightarrow{v_0} = r_0\overrightarrow{e_x} \times mv_0\overrightarrow{e_y} = mr_0v_0\overrightarrow{e_z}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{Cste} = mr_0v_0\overrightarrow{e_z}}$

• Comme $\forall t \quad \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans $\mathcal{T}$) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}$; en l'occurence, $\overrightarrow{e_z}$.

➜ Donc, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy).

2) Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique appliqué à l'électron donne :

$m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{F}$, ce qui s'écrit aussi : $m\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}} \quad (\star)$

avec : $\boxed{\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}}$, soit : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{mR^3}}$.

• Si on impose $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi\dfrac{c}{\lambda_0}$, on en déduit que : $\boxed{R = \left(\dfrac{\lambda_0^2}{16\pi^3\epsilon_0}\dfrac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3}}$

Pour l'**A.N.**, il suffit d'écrire R sous la forme : $\boxed{R = \left(\dfrac{\lambda_0^2}{4\pi^2}\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3} = 100\ pm}$

Rq : Ce résultat est cohérent avec la longueur caractéristique de la dimension d'un atome.

3) • La solution générale vectorielle de l'équation du mouvement $(\star)$ est :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{A}\cos(\omega_0 t) + \overrightarrow{B}\sin(\omega_0 t)$$

On en déduit l'expression générale de la vitesse de l'électron :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g} = -\omega_0\overrightarrow{A}\sin(\omega_0 t) + \omega_0\overrightarrow{B}\cos(\omega_0 t)$$

• Ces deux expressions générales doivent vérifier les deux conditions initiales :
$\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{A} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}(t=0) = \omega_0\overrightarrow{B} = v_0\overrightarrow{e_y}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r_0\cos(\omega_0 t)\overrightarrow{e_x} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{e_y}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega_0 t) \\ y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\end{cases}}$$

• Comme $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$ on en déduit l'équation de la trajectoire :
$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$, avec : $\boxed{a = r_0}$ et $\boxed{b = \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}}$

➜ La trajectoire est une ellipse de centre O, de demi-grand axe a selon Ox et de demi-petit axe b selon Oy.

4) • Pour que la trajectoire *a priori* elliptique soit circulaire, il faut que $a = b$, soit : $\boxed{v_0 = r_0\omega_0}$.

• Lorsque la vitesse initiale de l'électron est nulle : $b = \dfrac{v_0}{\omega_0} = 0$.

Cl : L'ellipse s'assimile à un segment $2a$: le mouvement est rectiligne selon Ox entre l'abscisse a et l'abscisse $-a$ (on retrouve l'oscillateur harmonique à une dimension).

Rq : On remarque l'importance des conditions initiales dues à la perturbation à $t = 0$, elles vont fixer la nature de la trajectoire de l'électron dans l'atome.

5) • Il faut prendre en compte une force de freinage dont il faut calculer le moment en O :

$$\mathcal{M}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{f} = \overrightarrow{OM} \times (-h\overrightarrow{v}) = -\frac{h}{m}\overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v} = -\frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

Dès lors, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) + \mathcal{M}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{0} - \frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{M/O}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{L}_{M/O}(t) = \overrightarrow{L}_{M/O}(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Cl : Le moment cinétique de l'électron en O tend vers $\overrightarrow{0}$ avec une constante de temps $\boxed{\tau = \frac{m}{h}}$.

• Le **P.F.D.** pour l'électron s'écrit désormais :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM} - h\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{h}}$

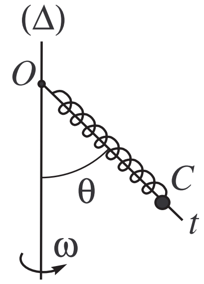
➜ On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique (spatial) amorti** : le rayon vecteur $r = OM$ tend vers 0.

Cl : Même si l'amortissement (qui traduit le rayonnement de l'électron) est faible, l'électron va se diriger inexorablement vers le centre O en tourbillonnant dans une trajectoire elliptique d'aire de plus en plus faible.

Rq : L'atome tel que l'a décrit ici THOMSON ne peut pas être stable. Niels BOHR crée en 1913 un autre modèle d'atome pour rendre compte de la stabilité atomique : les orbites des électrons sont alors quantifiées. ce fut le dernier modèle obéissant à la physique classique avant l'avènement de la physique quantique.

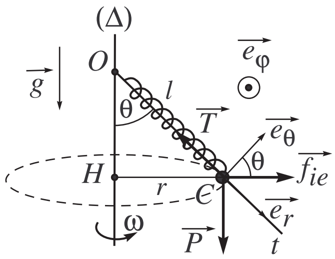
Ex-M9.1 Dynamique en référentiel non galiléen

On dispose d'un ressort à spires non jointives, de longueur au repos l_0 et de raideur k. On négligera la masse du ressort dans tout l'exercice proposé. On enfile ce ressort sur une tige Ot, soudée en O à un axe vertical (Δ) et inclinée obliquement par rapport à la verticale descendante d'un angle θ ($\theta < 90°$).
Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre on accroche un corps C, de masse m, coulissant sans frottements sur Ot.
L'ensemble tourne autour de Δ à la vitesse angulaire constante ω. le ressort n'oscille pas et a une longueur constante l.



1) Préciser la trajectoire décrite par C dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$.
2) Exprimer la longueur l du ressort en fonction de m, g, θ, k, l_0 et ω(après avoir défini le référentiel $\mathcal{R}$ adapté au problème). Quelle condition sur ω en découle ?
3) Exprimer, littéralement, l'intensité R de la force exercée par la tige sur C en focntion de m, g, θ, ω et l que l'on considérera comme un paramètre commode pour ne pas surcharger l'expression littérale de R.

➤ Solution
1) On étudie $\{C, m\}$ dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_0$ supposé galiléen.
En l'absence d'oscillations du ressort, le corps C n'est animé que d'un mouvement de rotation autour de l'axe (Δ).
La trajectoire de C est
- un cercle de centre H (projeté orthogonal de C sur (Δ))
- et de rayon $\boxed{r = CH = l\sin\theta}$
- parcouru à la vitesse angulaire ω.



2) On étudie C, m dans le référentiel lié à la tige $\mathcal{R}$. Ce référentiel est en rotation à la vitesse angulaire ω par rapport au référentiel terrestre ; $\mathcal{R}$ est donc non galiléen.
On lui associe le repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, avec $\overrightarrow{OC} = OC\overrightarrow{e_r}$, où $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ est une base cartésienne pour $\mathcal{R}$, mais sphérique pour $\mathcal{R}_0$.
• Dans $\mathcal{R}$, le point est soumis aux forces suivantes, qu'on exprime dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$:
Inventaire des forces vraies :

- le poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = \left| \begin{array}{l} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0 \end{array} \right.$

C étant susceptible de coulisser *sans frottement* sur la tige, la réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige sur C ne peut posséder une composante selon $\overrightarrow{e_r}$. C'est pourquoi on peut écrire (sans pouvoir la représenter précisément sur le schéma) :

- Réaction de la tige : $\overrightarrow{R} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ R_\theta \\ R_\varphi \end{array} \right.$

- Force de rappel du ressort : $\overrightarrow{T} = -k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_0}) = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_r} = \left| \begin{array}{l} -k(l - l_0) \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$

Parmi les forces d'inertie, la force d'inertie de Coriolis est nulle car :
$\overrightarrow{f_{iC}} = -m\overrightarrow{a}_C(C) = -2m\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} \times \overrightarrow{v}_{C/\mathcal{R}} = -2m\overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

Quant à la force d'inertie d'entraînement nécessite d'introduire le point coïncidant C^* qui coïncide avec C à l'instant t mais qui est lié au référentiel $\mathcal{R}$, donc entraîné dans un mouvement circulaire uniforme de rayon r, de centre H et de vitesse angulaire constante ω :

$$\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a}_e(C) = -m\overrightarrow{a}_{C^*/\mathcal{R}_0} = -m.(-\omega^2\overrightarrow{HC}) = m\omega^2\, r\,\overrightarrow{e}_{H\to C} = \left| \begin{array}{l} m\omega^2 l\sin^2\theta \\ m\omega^2 l\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{array} \right.$$

• On applique le PFD dans le référentiel $\mathcal{R}$ où C est immobile (équilibre relatif) :

$$m\overrightarrow{a}_{C/\mathcal{R}} = \sum \overrightarrow{F} \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{f_{ie}}$$

On projette cette équation vectorielle selon $\overrightarrow{e_r}$ pour obtenir une équation scalaire mettant en jeu l sans faire intervenir les composantes R_θ et R_φ qui nous sont inconnues :

$$0 = mg\cos\theta + 0 - k(l - l_0) + m\omega^2 l\sin^2\theta \;\Leftrightarrow\; l(k - m\omega^2\sin^2\theta) = mg\cos\theta + kl_0$$

Soit :

$$\boxed{l = \frac{mg\cos\theta + kl_0}{k - m\omega^2\sin^2\theta}}$$

Comme l est une longueur ($l > 0$), on doit vérifier la condition $k - m\omega^2\sin^2\theta > 0$, soit :

$$\boxed{\omega < \sqrt{\frac{k}{m\sin^2\theta}}}$$

Interprétation de cette condition : la vitesse angulaire ne doit pas excéder une valeur limite, faute de quoi l tendrait vers l'infini. Une telle valeur est inaccessible, bien entendu, ne serait ce que parce si la rotation devient trop rapide, le ressort s'étire trop, devenant un simple fil métallique, sans propriété élastique, sa tension ne suivant plus la loi $\overrightarrow{T} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e}$; alors, les équations du mouvement précédentes ne sont plus valables

3) La projection du PFD selon $\overrightarrow{e_\varphi}$ donne : $\boxed{R_\varphi = 0}$.
Donc $R = |R_\theta|$, avec R_θ déterminée par la projection du PFD selon $\overrightarrow{e_\theta}$:

$$0 = -mg\sin\theta + R_\theta + 0 + m\omega^2 l\sin\theta\cos\theta \;\Leftrightarrow\; R_\theta = m\sin\theta(g - l\omega^2\cos\theta)$$

Soit : $\boxed{R = |R_\theta| = m\sin\theta.|g - l\omega^2\cos\theta|}$

Ex-M10.1 Mouvement d'une planète autour du Soleil

Une Planète, de masse m, gravite autour du Soleil de masse $M \gg m$. On travaille dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$, supposé galiléen, centré sur le centre d'inertie G du système $\mathcal{S} = \{S, P\}$. Dans ce référentiel, la réduction canonique permet l'étude du mouvement d'un point fictif, de masse μ, repéré par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK}$, de vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}_{K/\mathcal{R}^*}$ et soumis à la force $\overrightarrow{f}$.

1) Expliciter μ, $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{f}$ en fonction des données de l'énoncé.

2) Dans $\mathcal{R}^*$, le moment cinétique du système en G vaut : $\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{L}_{G/\mathcal{R}^*}(\mathcal{S}) = \overrightarrow{L}_{G/\mathcal{R}^*}(K) = \overrightarrow{r} \times \mu\overrightarrow{v}$. Démontrer que $\overrightarrow{L^*}$ est constant et en déduire que le mouvement de K dans $\mathcal{R}^*$ est plan. On notera $\overrightarrow{e_z}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan.

On définit le vecteur $\overrightarrow{C} = \dfrac{\overrightarrow{L^*}}{\mu}$ de norme C. Exprimer $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, la vitesse angulaire de rotation de K, en fonction de C et de r.

3) Démontrer qu'en coordonnées polaires, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_{K/\mathcal{R}^*}$, l'accélération de K dans $\mathcal{R}^*$ peut s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{a} = -C^2u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\overrightarrow{e_r} \quad \text{avec } u = \frac{1}{r}$$

En déduire un équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par u.

4) À l'aide de la question précédente, montrer que r peut s'écrire : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, où e est l'excentricité du mouvement de K, et p un paramètre, dont on donnera l'expression en fonction de μ, C, $\mathcal{G}$, M, et m.

5) Pour quelles valeurs de e la trajectoire est-elle elliptique ? Montrer qu'alors le demi-grand axe a de l'ellipse vaut $a = \dfrac{p}{1-e^2}$.

6) On rappelle que si K décrit une ellipse, la surface S de celle-ci vaut $S = \pi.a.b$ avec b le demi-petit axe de l'ellipse. On appelle T la période de rotation du système autour de G et on rappelle que $p = \dfrac{b^2}{a}$.

En déduire la troisième loi de Képler. Commenter ce résultat.

➤ Solution

1) $\boxed{\mu = \dfrac{Mm}{M+m}}$ $\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{GK} = \overrightarrow{SP} = r\overrightarrow{e_r}}$ $\boxed{\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_{S\to P} = -\mathcal{G}\dfrac{Mm}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$.

2) Le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique pour la particule fictive donne, comme $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{f}$ sont parallèles :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L^*}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{\mathrm{Cte}} = \overrightarrow{r} \times \mu\overrightarrow{v}}$$

Cette égalité montre que $\overrightarrow{r} \perp \overrightarrow{L^*}$, c'est-à-dire que tous les vecteurs $\overrightarrow{GK}(t) = \overrightarrow{SP}(t)$ sont perpendiculaires à un même vecteur $\overrightarrow{L^*}$ constant, donc à une direction constante de l'espace, qu'on peut appeler $\overrightarrow{e_z}$.

On en déduit que les mouvements de la particule fictive, du Soleil et de la planète ont lieu dans le plan Gxy perpendiculaire à la direction $(G, \overrightarrow{e_z}) = (Gz)$.

On peut donc décrire le mouvement plan de K dans la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. Le vecteur position s'écrit $\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r}$ et le vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. Alors :

$$\overrightarrow{L^*} = \overrightarrow{r} \times \mu\overrightarrow{v} = r\overrightarrow{e_r} \times (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = \mu r^2\omega\,\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{C} = r^2\omega\,\overrightarrow{e_z}} \Rightarrow \boxed{C = r^2\omega} \Leftrightarrow \boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}}$$

3) Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique donne, pour la particule fictive étudiée dan sle référentiel galiléen $\mathcal{R}^*$: $\mu\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f}$. Comme $\overrightarrow{f}$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_r}$, on en déduit que l'accélération est purement radiale, ce qui s'exprime, en coordonnées polaires, de la manière suivante : $\overrightarrow{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\overrightarrow{e_r}$.

En posant $u \equiv \dfrac{1}{r}$, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -C\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right) = -C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -C\,u'_\theta \\ \ddot{r} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{C}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\theta}\left(-C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\dfrac{C^2}{r^2}.\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = -C^2\,u^2.u''_\theta \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad \begin{cases} \dot{r} = -C\,u'_\theta \\ \boxed{\ddot{r} = -C^2\,u^2.u''_\theta} \end{cases}$$

Par ailleurs, comme $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{C}{r^2}$, on en déduit $\boxed{r\omega^2 = C^2\,u^3}$. ce qui permet d'exprimer $\overrightarrow{a}$ en fonction de la seule variable $\dfrac{1}{r} = u = u(\theta)$:

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -C^2\,u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\overrightarrow{e_r}}$$

Alors, le **P.F.D.** s'écrit :

$$\mu\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{f} \quad \Leftrightarrow \quad -\mu C^2\,u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u\right)\overrightarrow{e_r} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r^2}\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}}$$

4) Cette équation différentielle admet :
- une solution générale u_G de l'équation sans second membre :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_G}{\mathrm{d}\theta^2} + u_G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_G = A\cos(\theta - \varphi) \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \varphi \in [0, 2\pi[$$

- une solution particulière u_P de l'équation avec second membre (celui-ci étant constant, on cherche u_P constante) :

$$\cancel{\frac{\mathrm{d}^2u_P}{\mathrm{d}\theta^2}} + u_P = \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2} \quad \Leftrightarrow \quad u_G = \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}$$

On en déduit la solution de l'équation différentielle : $u = u_G + u_P = A\cos(\theta - \varphi) + \dfrac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}$

Choisir $r = r_{min}$ pour $\theta = 0$ (soit $u = u_{max}$) revient prendre $\varphi = 0$. ce que nous faisons, puisque l'énoncé ne s'y oppose pas.

$$u = A\cos\theta + \frac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2} = \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{A\cos\theta + \dfrac{\mathcal{G}Mm}{\mu C^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = A.p \\ \boxed{p = \dfrac{\mu C^2}{\mathcal{G}Mm}} \end{cases}$$

Rq : Le choix $\varphi = 0$ revient à confondre l'axe polaire avec l'axe focal : $\overrightarrow{e_r}(\theta = 0) = \overrightarrow{e_x}$.

5) $r_{max} = r_A = r(\theta = \pi) = \dfrac{p}{1 - e}$

et $r_{min} = r_P = r(\theta = 0) = \dfrac{p}{1 + e}$

Comme $2a \equiv r_A + r_P$,

on a $2a = p\left(\dfrac{1}{1 - e} + \dfrac{1}{1 + e}\right)p.\dfrac{2}{1 - e^2}$, soit : $\boxed{a = \dfrac{p}{1 - e^2}}$.

6) D'une part la surface de l'ellipse est $S = \pi.a.b$, d'autre part, on peut la calculer sous la forme :

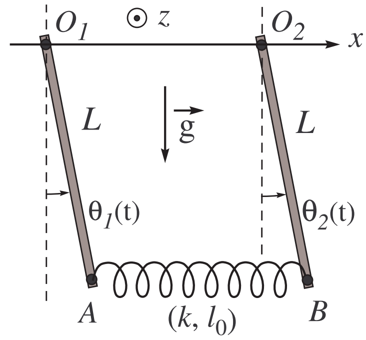
$$S = \int_{\text{trajectoire}} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}.r.r\mathrm{d}\theta = \int_0^T \frac{r^2}{2}.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}.\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{C}{2}.\mathrm{d}t = \frac{C}{2}.T$$

On a donc : $S = \pi.a.b = \dfrac{C}{2}.T \ \Rightarrow \ \pi^2a^2b^2 = \dfrac{C^2}{4}T^2 \ \Rightarrow \ \pi^2a^3p = \dfrac{C^2}{4}T^2$

Comme $p = \dfrac{\mu C^2}{\mathcal{G}Mm}$, on en déduit : $\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{\mathcal{G}Mm}{4\pi^2\mu}$

Comme $\mu = \dfrac{Mm}{M + m}$ et puisque $M \gg m$, on obtient : $\boxed{\dfrac{a^3}{T^2} = \dfrac{\mathcal{G}(M + m)}{4\pi^2} \simeq \dfrac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}}$ (3e loi de Képler, où le lien entre a, le demi-grand axe de l'ellipse de la planète, et T, sa période de rotation autour du Soleil, est indépendante de la masse m de la planète)

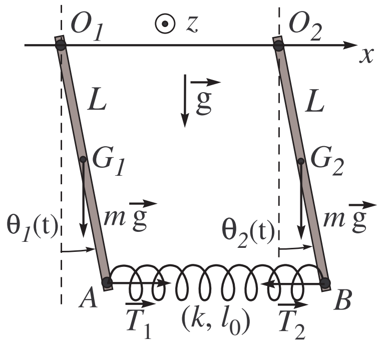
Ex-M12.1 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe



On considère le système constitué par l'ensemble de deux tiges identiques, de longueur L, de masse m et d'un ressort idéal, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.
On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
Les tiges peuvent tourner, par l'intermédiaire de liaisons pivots parfaites, autour des axes O_1z et O_2z fixes (perpendiculaires au plan de la figure).
On repère les positions de ces dernières par les angles θ_1 et θ_2.
Les extrémités opposées des tiges sont liées par le ressort. Lorsque les angles sont nuls, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.
On suppose qu'au cours du mouvement ce dernier reste constamment horizontal.
À $t = 0$ on écarte les tiges des angles θ_{10} et θ_{20}, et on les abandonne sans vitesse intitiale.
On posera $\omega_1^2 = \dfrac{3k}{m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{3g}{2L}$. On donne le moment d'inertie de chaque tige par rapport à son axe de rotation : $J = \dfrac{mL^2}{3}$.

1) Au cours du mouvement, exprimer l, longueur approximative du ressort à l'instant t, en fonction de l_0, L, θ_1 et θ_2.
2) Déterminer deux équations différentielles couplées liant θ_1 et θ_2.
3) Dans le cas où $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$, exprimer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.
4) Dans le cas où $\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$, exprimer $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

➤ Solution



1) La longueur l du ressort à l'instant t est : $\boxed{ll_0 - L\theta_1 + L\theta_2 = l_0 + L(\theta_1 - \theta_2)}$.
Le terme $-L\theta_1$ correspond à la compression du ressort du fait que le pendule (1) est écarté de θ_1.
Le terme $L\theta_2$ correspond à la compression du ressort du fait que le pendule (2) est écarté de θ_2.

2) • La tige (1) a un mouvement de rotation autour de l'axe O_{1z}. La liaison assurant la rotation est parfaite, ce qui signifie que le moment en O_1 des actions de contact entre l'axe de rotation et la tige est perpendiculaire à O_{1z}. On va travailler avec la base cartésienne $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$
Le théorème du moment cinétique (de la tige évalué en O_1 projeté) par rapport à l'axe O_{1z} s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}L_{O_{1z}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{O_{1z}}(\vec{F}_{ext}) = (\overrightarrow{O_1G_1} \times \vec{P_1}) \cdot \vec{e_z} + (\overrightarrow{O_1G_1} \times \vec{T_1}) \cdot \vec{e_z} + \cancel{\mathcal{M}_{O_{1z}}(\text{contact})}$$

• $L_{O_{1z}} = \vec{L}_{O_1}(\text{tige}) \cdot \vec{e_z} = J_{O_{1z}}\,\dot{\theta}_1 = \dfrac{mL^2}{3}\,\dot{\theta}_1$

• $$\mathcal{M}_{O_{1z}}(\vec{P_1}) = (\overrightarrow{O_1G_1} \times m\vec{g}) \cdot \vec{e_z} = \left(\left| \begin{array}{l} \dfrac{L}{2}\sin\theta_1 \\ -\dfrac{L}{2}\cos\theta_1 \\ 0 \end{array} \right. \times \left| \begin{array}{l} 0 \\ -mg \\ 0 \end{array} \right. \right) \cdot \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right. = -\frac{mgL}{2}\sin\theta_1$$

Comme on travaille avec de très petits angles, on a : $\mathcal{M}_{O_{1z}}(\vec{P_1}) \simeq -\dfrac{mgL}{2}\theta_1$

• La tension exercée par le ressort sur (1) s'écrit : $\vec{T_1} = -k(l - l_0)\,(-\vec{e_x}) = kL(\theta_2 - \theta_1)\,\vec{e_x}$.
On en déduit que : $\mathcal{M}_{O_{1z}}(\vec{T_1}) = (\overrightarrow{O_1G_1} \times \vec{T_1}) \cdot \vec{e_z} = [(L\sin\theta_1\vec{e_x} - L\cos\theta_1\vec{e_y}) \times kL(\theta_2 - \theta_1)\,\vec{e_x}] \cdot \vec{e_z}$
Soit : $\mathcal{M}_{O_{1z}}(\vec{T_1}) = kL^2(\theta_2 - \theta_1)\cos\theta_1 \simeq kL^2(\theta_2 - \theta_1)$.

• Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{mL^2}{3}\,\ddot{\theta}_1 = -\frac{mgL}{2}\theta_1 + kL^2(\theta_2-\theta_1) \;\Leftrightarrow\; \ddot{\theta}_1 + \frac{3g}{2L}\,\theta_1 + \frac{3k}{m}\,\theta_1 = \frac{3k}{m}\,\theta_2$$

Soit, en introduisant les notations de l'énoncé : $\boxed{\ddot{\theta}_1 + (\omega_0^2+\omega_1^2)\,\theta_1 = \omega_1^2\theta_2}$.

• La tige (2) a un mouvement de rotation autour de l'axe O_{2z}. La liaison assurant la rotation est parfaite, ce qui signifie que le moment en O_2 des actions de contact entre l'axe de rotation et la tige est perpendiculaire à O_{2z}.

Le théorème du moment cinétique (de la tige évalué en O_2 projeté) par rapport à l'axe O_{2z} s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}L_{O_{2z}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{O_{2z}}(\overrightarrow{F}_{ext}) = (\overrightarrow{O_2G_2}\times\overrightarrow{P_2})\cdot\overrightarrow{e_z} + (\overrightarrow{O_2G_2}\times\overrightarrow{T_2})\cdot\overrightarrow{e_z} + \cancel{\mathcal{M}_{O_{2z}}(\text{contact})}$$

• $L_{O_{2z}} = \overrightarrow{L}_{O_2}(\text{tige})\cdot\overrightarrow{e_z} = J_{O_{2z}}\,\dot{\theta}_2 = \dfrac{mL^2}{3}\,\dot{\theta}_2$

• Comme pour la tige (1), le moment du poids de la tige (2) selon O_{2z} s'écrit : $\mathcal{M}_{O_{2z}}(\overrightarrow{P_2}) \simeq -\dfrac{mgL}{2}\theta_2$

• La tension exercée par le ressort sur (2) s'écrit : $\overrightarrow{T_2} = -k(l-l_0)\,\overrightarrow{e_x} = -kL(\theta_2-\theta_1)\,\overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{T_1}$.

On en déduit que : $\mathcal{M}_{O_{1z}}(\overrightarrow{T_1}) = -\mathcal{M}_{O_{1z}}(\overrightarrow{T_1}) \simeq -kL^2(\theta_2-\theta_1)$

• Le théorème du moment cinétique s'écrit donc :

$$\frac{mL^2}{3}\,\ddot{\theta}_2 = -\frac{mgL}{2}\theta_2 - kL^2(\theta_2-\theta_1) \;\Leftrightarrow\; \ddot{\theta}_2 + \frac{3g}{2L}\,\theta_2 + \frac{3k}{m}\,\theta_2 = \frac{3k}{m}\,\theta_1$$

Soit, en introduisant les notations de l'énoncé : $\boxed{\ddot{\theta}_2 + (\omega_0^2+\omega_1^2)\,\theta_2 = \omega_1^2\theta_1}$.

• Nous obtenons donc un système de deux équations différentielles :

$$\left\{\begin{array}{ll}\ddot{\theta}_1 + (\omega_0^2+\omega_1^2)\,\theta_1 = \omega_1^2\theta_2 & ① \\ \ddot{\theta}_2 + (\omega_0^2+\omega_1^2)\,\theta_2 = \omega_1^2\theta_1 & ②\end{array}\right. \quad \xrightarrow[①-②]{①+②} \quad \left\{\begin{array}{lll}\ddot{u} + \omega_0^2\,u = 0 & ③ & \text{avec } u = \theta_1+\theta_2 \\ \ddot{v} + \Omega^2\,v = 0 & ④ & \text{avec } v = \theta_1-\theta_2 \text{ et } \Omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2\end{array}\right.$$

• La solution de ③ est $u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Comme $\left\{\begin{array}{lll} u(0) = & A & \theta_{10}+\theta_{20} \\ \dot{u}(0) & B\omega_0 & = 0\end{array}\right.$ on en déduit : $A = \theta_{10}+\theta_{20}$ et $B = 0$,

soit : $\boxed{u = (\theta_{10}+\theta_{20})\cos(\omega_0 t)}$.

• La solution de ④ est $v = C\cos(\Omega t) + D\sin(\Omega t)$.

Comme $\left\{\begin{array}{lll} v(0) = & C & \theta_{10}-\theta_{20} \\ \dot{v}(0) & D\Omega & = 0\end{array}\right.$ on en déduit : $C = \theta_{10}-\theta_{20}$ et $D = 0$,

soit : $\boxed{v = (\theta_{10}-\theta_{20})\cos(\Omega t)}$.

• Puisque $\theta_1 = \dfrac{u+v}{2}$ et $\theta_2 = \dfrac{u-v}{2}$, on obtient :

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\theta_{10}+\theta_{20}}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{\theta_{10}-\theta_{20}}{2}\cos(\Omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_2 = \frac{\theta_{10}+\theta_{20}}{2}\cos(\omega_0 t) - \frac{\theta_{10}-\theta_{20}}{2}\cos(\Omega t)}$$

3) Dans le cas où $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$, on obtient $\boxed{\theta_1(t) = \theta_0\,\cos(\omega_0 t)}$ et $\boxed{\theta_2(t) = \theta_1(t)}$.

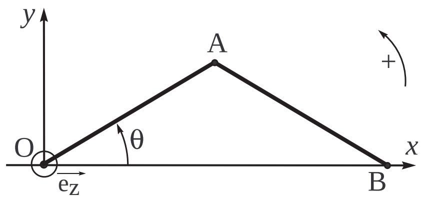
Cl : il s'agit du mode **symétrique** : les pendules oscillent en phase à la pulsation ω_0.

4) Dans le cas où $\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$, on obtient $\boxed{\theta_1(t) = \theta_0\,\cos(\Omega t)}$ et $\boxed{\theta_2(t) = -\theta_1(t)}$

Cl : il s'agit du mode **antisymétrique** : les pendules oscillent en opposition de phase à la pulsation $\Omega = \sqrt{w_0^2+\omega_1^2}$.

Ex-M12.2 Éléments cinétiques de deux tiges articulées :

Deux tiges homogènes OA et AB de même longueur a, de même masse m sont mobiles dans le plan (Oxy). L'extrémité O est fixe, l'extrémité B est assujettie à glisser sur (Ox) et les deux tiges sont articulées en A. Quels sont, dans le repère $\mathcal{R} = (Oxy)$ le moment cinétique en O et l'énergie cinétique du système ?

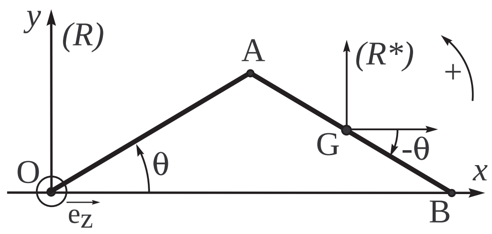


➤ **Solution** Il faut d'abord considérer chacune des tiges séparément :

• La tige OA possède un mouvement simple de rotation autour de l'axe fixe (Oz) ; de plus elle est contenue dans le plan $z = 0$ passant par O, son moment cinétique en O est donc parallèle à l'axe de rotation :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(OA) = J_{Oz}\overrightarrow{\Omega}_{OA/\mathcal{R}} = \frac{1}{3}ma^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(OA) = \frac{1}{2}J_{Oz}\Omega^2 = \frac{1}{6}ma^2\dot{\theta}^2}$$

• La tige AB possède un mouvement composé de la translation de son centre de masse G et de la rotation autour de l'axe fixe Gz dans son repère barycentrique $(\mathcal{R}^*)$, de vitesse angulaire $\overrightarrow{\Omega}_{AB/\mathcal{R}^*} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$ (les deux tiges tournent en sens inverse).



Les théorèmes de Kœnig s'appliquent :

○ pour le moment cinétique : $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(AB) = \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}^*}(AB) + \overrightarrow{OG} \times \overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}}$

$$\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}^*}(AB) = J_{Gz}\overrightarrow{\Omega}_{OA/\mathcal{R}^*} = -\frac{1}{12}\,ma^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\overrightarrow{OG} \times \overrightarrow{v}_{G/\mathcal{R}} = \left|\begin{array}{l} \frac{3a}{2}\cos\theta \\ \frac{a}{2}\sin\theta \\ 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} -\frac{3a}{2}\dot{\theta}\sin\theta \\ \frac{a}{2}\dot{\theta}\cos\theta \\ 0 \end{array}\right. = \frac{3}{4}\,ma^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\rightarrow \boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(AB) = \frac{2}{3}\,ma^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}}$$

○ pour l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(AB) = \mathcal{E}_{k/\mathcal{R}*}(AB) + \frac{1}{2}mv^2_{G/\mathcal{R}}$

$$\frac{1}{2}mv^2_{G/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\,m(9\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\frac{a^2\dot{\theta}^2}{4} = \frac{1}{8}\,ma^2(1 + 8\sin^2\theta)\,\dot{\theta}^2$$

$\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}*}(AB) = \frac{1}{2}\,J_{Gz}(-\dot{\theta})^2 = \frac{1}{24}\,ma^2\dot{\theta}^2$, d'où : $\boxed{\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(AB) = \left(\frac{1}{6} + \sin^2\theta\right)\,ma^2\dot{\theta}^2}$

• Par somme sur les deux tiges :

$$\boxed{\overrightarrow{L}_{O\mathcal{R}} = \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(OA) + \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}}(AB) = ma^2\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_z}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{k/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(OA) + \mathcal{E}_{k/\mathcal{R}}(AB) = \left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\,ma^2\dot{\theta}^2}$$

Ex-M12.3 **Demi-boule (QC)**

Considérons une demi-boule homogène de rayon R caractérisée par la masse volumique ρ. Déterminer sa masse m et la position de son centre d'inertie G.

➤ **Solution**

• On effectue la description en coordonnées sphériques (r, θ, φ) telles que $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

• La masse m de la demi-boule s'écrit $m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}\tau$.

Soit $m = \iiint_{\mathcal{V}} \rho r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \rho \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \rho \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} \left[\varphi\right]_0^{2\pi}$,

d'où $\boxed{m = \rho.\frac{2}{3}.\pi.R^3 = \rho \frac{V_{\text{sphère}}}{2}}$ (c'est bien la moitié de la boule entière).

• Pour déterminer la position du centre d'inertie G, on utilise sa définition : $m\overrightarrow{OG} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{OP} \rho \mathrm{d}\tau$.

Pour des raisons de symétrie G est sur l'axe Oz, soit $mz_G = m\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{e_z} = \iiint_{\mathcal{V}} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{e_z} \rho \mathrm{d}\tau$.

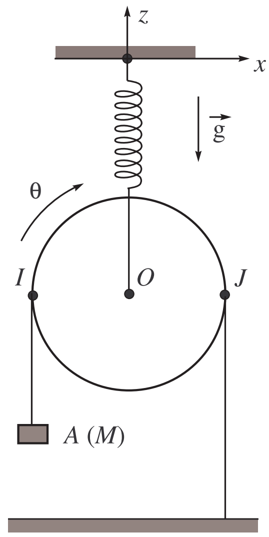
Or $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{e_z} = r\cos\theta$.

D'où $mz_G = \iiint_{\mathcal{V}} \rho.r\cos\theta.r^2\sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = \rho \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$

Soit : $mz_G = \rho \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \rho\frac{\pi^4}{4}$

Finalement : $\boxed{z_G = \frac{3R}{8}}$.

Ex-M12.4 Période des oscillations d'une masse



Un masse M (assimilable à un point matériel A) est suspendue à un fil passant par une poulie de masse m, de rayon R.

On note $J_{Oy} = \dfrac{mR^2}{2}$, le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe Oy passant par O et perpendiculaire au plan de la poulie.

On admettra que le fil ne glisse pas sur la poulie.

La poulie est suspendue par son centre à un ressort de constante de raideur k, et de longueur à vide l_0.

On néglige les frottements. On appelle z et Z, respectivement, les écarts de la masse M et de la poulie par rapport à leur position d'équilibre.

1) Donner l'énergie mécanique du système en fonction de z et de $\dot{z}$ (on n'explicitera pas l_e, longueur à l'équilibre du ressort).

2) Donner la période des petites oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

➤ **Solution 1)** L'énergie mécanique du système $\mathcal{S}$ ={masse, fil, poulie, ressort} étudié dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ considéré galiléen s'écrit : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p$, avec :

- $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k(\text{poulie}) + \mathcal{E}_k(A) = \underbrace{\frac{1}{2}J_{Oy}\dot{\theta}^2}_{\text{rotation de la poulie}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{Z}^2}_{\text{translation de la poulie}} + \frac{1}{2}M\dot{z}^2$

- $\mathcal{E}_p = \underbrace{mgZ}_{\text{poulie}} + \underbrace{Mgz}_{\text{masse}} + \underbrace{\frac{1}{2}k(l_e - Z - l_0)^2}_{\text{ressort}} + \text{Cte}$

$\Rightarrow$ Il reste à exprimer Z, $\dot{Z}$ et $\dot{\theta}$ en fonction de z et $\dot{z}$.

- On utilise la condition de non glissement du fil sur la poulie pour les points I et J, en posant le vecteur rotation de la poulie $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_y}$:

➜ Non glissement de I, avec $I_1 \in$ fil et $I_2 \in$ poulie :

$\overrightarrow{V_g}(I) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{I_1/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{I_2/\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \dot{z}\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{v_{O/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{OI_2} = \dot{Z}\overrightarrow{e_z} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_y} \times (-R\overrightarrow{e_x}) \Rightarrow \dot{z} = \dot{Z} + R\dot{\theta}$

➜ Non glissement de J, avec $J_1 \in$ fil et $J_2 \in$ poulie :

$\overrightarrow{V_g}(J) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{J_1/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{J_2/\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v_{O/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{OJ_2} = \dot{Z}\overrightarrow{e_z} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_y} \times R\overrightarrow{e_x} \Rightarrow \dot{Z} = R\dot{\theta}$

Des deux résultats précédents, on déduit : $\boxed{\dot{Z} = \frac{\dot{z}}{2}}$, $\boxed{\dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{2R}}$ et $\boxed{Z = \frac{z}{2}}$. D'où :

- $\mathcal{E}_k = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{\dot{z}^2}{4R^2}}_{\text{rotation de la poulie}} + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{\dot{z}^2}{4}}_{\text{translation de la poulie}} + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 = \left(\frac{3m}{16} + \frac{M}{2}\right)\dot{z}^2$

- $\mathcal{E}_p = \left(\frac{mg}{2} + Mg\right) z + \frac{1}{2}k(l_e - \frac{z}{2} - l_0)^2$

- Donc : $\boxed{\mathcal{E}_m = \left(\frac{3m}{16} + \frac{M}{2}\right)\dot{z}^2 + \left(\frac{mg}{2} + Mg\right) z + \frac{1}{2}k\left(l_e - \frac{z}{2} - l_0\right)^2}$

2) Le système étant conservatif (absence de frottements), le théorème de la puissance mécanique s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{f}) = 0$,

$$\left(\frac{3m}{8} + M\right)\ddot{z}\dot{z} + \left(\frac{mg}{2} + Mg\right)\dot{z} - \frac{1}{2}k\left(l_e - \frac{z}{2} - l_0\right)\dot{z} = 0$$

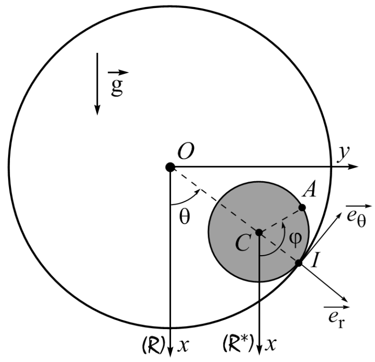
soit, après simplification par $\dot{z}$: $\ddot{z} + \dfrac{k}{4M + \dfrac{3m}{2}}\, z + \text{Cte} = 0$

Lorsqu'on est à l'équilibre, $\ddot{z} = 0$ et $z = 0$, soit Cte $= 0$ et, finalement :

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{4M + \dfrac{3m}{2}}}}$$

Les oscillations sont sinusoïdales de période : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{4M + \dfrac{3m}{2}}{k}}}$

Ex-M12.5 Période des oscillations d'une masse



Un disque $\mathcal{D}$ de masse m, de rayon a et de centre C, peut rouler, dans un plan vertical Oxy, à l'intérieur d'un cylindre de centre O et fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$.
On note $b = OC$ la distance de O à C.
$\mathcal{D}$ est homogène de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}ma^2$ par rapport à son axe Cz.
Le cœfficient de frottement entre le cylindre et le disque est f.
Ox est l'axe vertical, le chap de pesanteur g est uniforme.
On appelle θ, l'angle entre $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{Oc}$, et φ celui entre $\overrightarrow{e_x}$ et la direction $\overrightarrow{CA}$ où A est un point périphérique de $\mathcal{D}$.
On suppose que $\mathcal{D}$ peut rouler dans glisser dans le cylindre. En outre, l'angle θ reste faible.
1) Déterminer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ de $\mathcal{D}$ en imposant $\mathcal{E}_p(0) = 0$. En donner une expression approchée au deuxième ordre en θ.
2) Établir la relation liant $\dot{\theta}$ et $\dot{\varphi}$.
3) L'énergie mécanique du disque est-elle conservée ? Pourquoi ?
4) Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par $\theta(t)$. La résoudre avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
5) Pour la solution précédente, calculer les valeurs moyennes de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Que constate-t-on ?
6) Application numérique : $\theta_0 = 0,1\ rad$; $m = 160\ g$; $g = 10\ m.s^{-2}$, $b = 20\ cm$. Calculer l'énergie cinétique moyenne de $\mathcal{D}$.

➤ Solution

1) L'énergie potentielle de pesanteur du disque de centre d'inertie C est donnée par

$$\Delta\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(\theta) - \mathcal{E}_p(0) = -W(\overrightarrow{P}) = -\int \delta W = -\int m\overrightarrow{g}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OC} = -\int_0^\theta \mathrm{d}(m\overrightarrow{g}\,.\,\overrightarrow{OC})$$

Soit, puisque $\mathcal{E}_p(0) = 0$: $\mathcal{E}(\theta) = -\int_0^\theta \mathrm{d}(mgb\cos\theta)$. D'où : $\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = mgb(1-\cos\theta)}$

Pour les faibles valeurs de θ, on peut effectuer un développement limité au second ordre de $\cos\theta$, sachant que $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Soit : $\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) \simeq \frac{mgb}{2}\theta^2}$

2) La condition de roulement sans glissement appliqué au disque nous donne, dans le référentiel terrestre, pour le point I, avec $I_1 \in$ cylindre et $I_2 \in$ disque, et avec $\overrightarrow{W} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$:

$$\overrightarrow{V_g}(I) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_{I_1/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{I_2/\mathcal{R}}} \Leftrightarrow \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v_{C/\mathcal{R}}} + \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{CI_2} = b\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z} \times (a\overrightarrow{e_r}) = b\dot{\theta} + a\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\theta},$$

soit : $\boxed{\dot{\theta} = -\frac{a}{b}\dot{\varphi}}$

3) Les seules forces non conservatifs auxquels est soumis le disque sont les actions de contact qui agissent au niveau du contact avec le cylindre, le contact étant ponctuel, ces actions sont équivalents à un glisseur de point d'application I.
Si on note $\overrightarrow{R}$ la résultante de ces efforts, la puissance qui leur est associée est donnée par : $\overrightarrow{P}_{NC} = \overrightarrow{R}\,.\,\overrightarrow{V_g}(I) = 0$ du fait du non glissement.
Les forces non conservatives ne travaillant pas, il s'ensuit que l'énergie mécanique se concerve au cours du mouvement d'après le théorème de la puissance mécanique : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{NC} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = \text{Cte}$.

4) $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$ nous donne l'équation différentielle du mouvement.
Le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_k^* + \frac{1}{2}mv_{G/\mathcal{R}}^2 = \mathcal{E}_k^* + \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}^2$.
Dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$ lié au repère $(Cxyz)$, le disque a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Cz, donc : $\mathcal{E}_k^* = \frac{1}{2}J_{Cz}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}ma^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}mb^2\dot{\theta}^2$ car $\dot{\theta} = -\frac{a}{b}\dot{\varphi}$.
Ainsi : $\mathcal{E}_k = \frac{3}{4}mb^2\dot{\theta}^2$.

On en déduit : $\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{3}{4}mb^2\dot{\theta}^2 + \frac{mgb}{2}\theta^2}$

D'où : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}mb^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + mgb\dot{\theta}\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2g}{3b}\theta = 0}$ La solution de cette équation différentielle est donnée par :

$$\theta = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{3b}}}$$

Puisque $\theta(0) = A = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = B\omega_0 = 0$, soit $B = 0$.
La solution dans la limite des petits angles est donc donnée par : $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$.

5) $\mathcal{E}_p = \frac{mgb}{2}\theta_0^2\cos^2(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{< \mathcal{E}_p >= \frac{mgb}{4}\theta_0^2}$

$\mathcal{E}_k = \frac{3}{4}mb^2\theta_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{< \mathcal{E}_k >= \frac{3}{8}mb^2\theta_0^2\omega_0^2 = \frac{1}{4}mgb\theta_0^2}$

Conclusion : $\boxed{< \mathcal{E}_k >=< \mathcal{E}_p >}$.

6) $\boxed{< \mathcal{E}_k = 8.10^{-4}\ J >}$