

## DM n°2 – Dynamique Newtonienne

### Point glissant à l'intérieur et à l'extérieur d'une sphère

Dans ce qui suit, on admet qu'un point matériel mobile *sans frottement* sur la surface d'un solide  $\mathcal{S}$  subit de la part de celui-ci une *action de contact*  $\vec{N}$  normale à  $\mathcal{S}$  et dirigée vers l'extérieur de  $\mathcal{S}$  (« extérieur » = espace du côté de  $M$ ).

Soient  $\mathcal{S}$  une sphère creuse de centre  $C$  et de rayon  $a$ .  $O$  et  $A$  sont deux points diamétralement opposés. Dans toute la suite  $\mathcal{S}$  est fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le diamètre  $OA$  étant vertical.

On considère le mouvement sans frottement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans un plan vertical passant par  $OA$ .

1)  $OA$  étant une verticale ascendante et le mouvement de  $M$  s'effectuant sur la face interne de  $\mathcal{S}$ , établir une équation différentielle du second ordre ( $E$ ) vérifiée par la variable  $\theta = (\vec{CO}, \vec{CM})$ .

Déduire de ( $E$ ) le caractère sinusoïdal des *petits mouvements* de  $M$  au voisinage de  $O$  et donner l'expression de leur période.

2) En multipliant ( $E$ ) par  $\dot{\theta}$  et en remarquant que  $\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt}$ , intégrer ( $E$ ) par rapport au temps et en déduire la relation liant la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  (notée encore  $\omega$ ) et la position  $\theta$ .

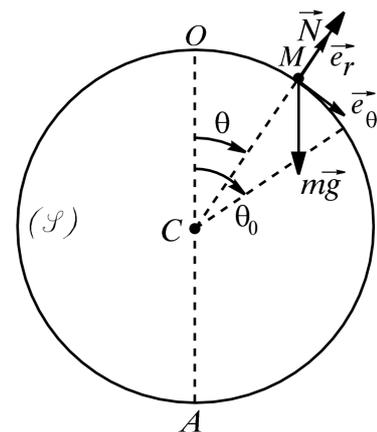
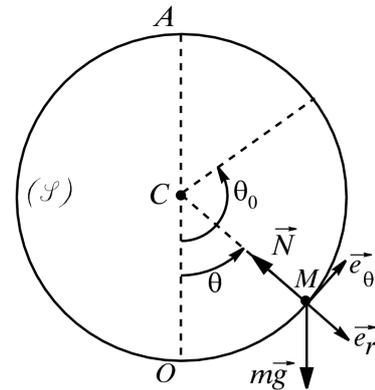
(Cette méthode évite le recours à des arguments énergétiques qui ne seront à notre disposition qu'en **M3**.)

Déterminer la constante d'intégration en sachant que  $M$  a été lancé de  $O$  avec une vitesse calculée pour lui permettre d'atteindre tout juste  $A$  « en principe » ; c'est-à-dire pour que  $M$  reste toujours au contact de  $\mathcal{S}$  jusqu'en  $A$ .

Montrer que, en fait,  $M$  quitte  $\mathcal{S}$  pour une valeur  $\theta_0$  de  $\theta$  inférieure à  $\pi$  que l'on calculera. Quelle est la nature de sa trajectoire ultérieure ?

3) Dans toute la suite,  $OA$  est maintenant une verticale descendante et le mouvement de  $M$  s'effectue sur la surface externe de  $\mathcal{S}$ . Avec les notations de la figure ci-contre, établir la nouvelle forme ( $E'$ ) de l'équation différentielle du mouvement et analyser la conclusion à laquelle celle-ci conduit pour un éventuel *petit mouvement*,  $M$  étant abandonné sans vitesse avec  $\theta(t=0) = \theta_0 = \alpha \ll 1$ .

3) En procédant comme à la question 2) pour intégrer ( $E'$ ) au premier ordre, donner l'expression de  $\dot{\theta}^2$  en fonction de  $\theta$  dans le cas où  $M$  part de  $O$  avec une vitesse négligeable et en déduire la valeur  $\theta_0$  pour laquelle  $M$  quitte  $\mathcal{S}$ .



#### Ex-M2.8 Le peintre et la poulie

Un peintre en bâtiment de masse  $M = 90 \text{ kg}$  est assis sur une chaise le long d'un mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force de  $680 \text{ N}$ . la masse de la chaise est  $m = 15 \text{ kg}$ . On travaille avec la verticale ( $Oz$ ) ascendante.

1) Déterminer l'accélération  $\vec{a} = a, \vec{e}_z$  du peintre et de la chaise. Commenter son signe.

2) Quelle force  $\vec{F} = F, \vec{e}_z$  le peintre exerce-t-il sur la chaise ?

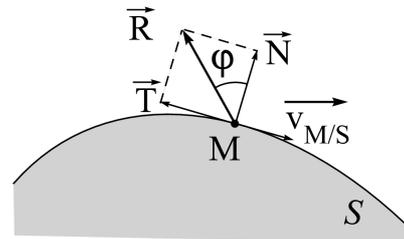
Rép : 1)  $a = 3,15 \text{ m.s}^{-2}$ ; 2)  $F \simeq -486 \text{ N}$ .

## Rappel et Compléments du cours

### Force de frottement solide, réaction du support

Lors du contact entre deux solides, donc lors du contact entre un point matériel  $M$  ( $m$ ) et un solide  $\mathcal{S}$ , ce dernier exerce sur le point  $M$  une force  $\vec{R}$  appelée réaction, composée d'une réaction normale (à la surface de contact)  $\vec{N}$ , et d'une réaction tangentielle  $\vec{T}$  (dite force de frottement) vérifiant **Les lois de Coulomb** :

- S'il y a glissement de  $M$  sur  $\mathcal{S}$  :  $\|\vec{T}\| = f \|\vec{N}\|$   
où  $f$  est le *coefficient de frottement*<sup>1</sup>
- S'il n'y a pas de glissement de  $M$  sur  $\mathcal{S}$  ( $\vec{v}_{M/\mathcal{S}} = \vec{0}$ ) :  $\|\vec{T}\| < f \|\vec{N}\|$ .

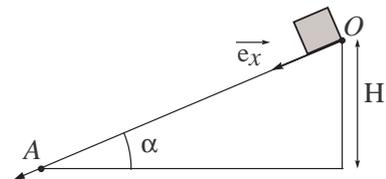


**Remarques :**

- En posant  $\vec{N} \equiv N \vec{u}$  ( $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé de  $\mathcal{S}$  vers  $M$ , perpendiculaire à la surface de contact) : le contact se maintient si  $N > 0$  et le contact cesse si  $N = 0$ .
- En l'absence de frottement ( $f = 0$ ), la réaction du solide  $\mathcal{S}$  est normale, c'est-à-dire  $\vec{R} = \vec{N}$  ; elle reste donc à chaque instant perpendiculaire au support.

#### Ex-M2.9 Glissement d'un solide sur un plan incliné

Un solide supposé ponctuel de masse  $m$  est déposé à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente  $Ox$  d'un plan incliné d'angle  $\alpha$ , sans vitesse initiale. On note  $H$  la distance de ce point initial  $O$  au plan horizontal et  $g$  l'intensité du champ de pesanteur.



#### 1) Absence de frottement

- Déterminer l'accélération du mobile à l'instant  $t$ , lorsque les frottements de glissement sont négligés.
- En déduire la vitesse du mobile au point  $A$ .

#### 2) Existence de frottement de glissement

- Quelle est la condition sur  $f$ , le coefficient de frottement pour que le solide commence à glisser à  $t = 0$  ?
- Reprendre les questions de la partie 1.

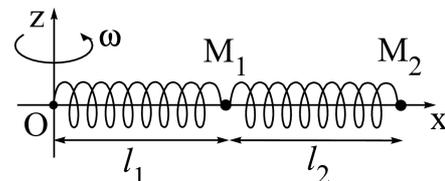
**Rép :** 1)  $v_A = \sqrt{2gH}$  ; 2)  $v_A = \sqrt{2gH(1 - f \cotan \alpha)}$  lorsque  $f < \tan \alpha$ .

#### Ex-M2.10 Points matériels en rotation

Un système de deux particules identiques  $M_1$  et  $M_2$  (de masse  $m$ ) peut coulisser sans frottement sur un axe rigide horizontal  $Ox$ .  $M_1$  est lié à  $O$ , et  $M_2$  est lié à  $M_1$  par deux ressorts identiques de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .

L'axe  $Ox$  tourne autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire constante  $\omega$ . On pose  $K \equiv \frac{k}{m\omega^2}$ .

→ Trouver les deux équations du mouvement liant  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_0$  et  $K$ .



**Conseil :** Appeler  $(Ox_0y_0z_0)$  le repère cartésien du référentiel terrestre. Faire une vue de dessus pour une position quelconque de la tige. faire apparaître l'angle orienté  $\theta$  entre l'axe (fixe) des abscisses ( $Ox_0$ ) et la tige ( $Ox$ ). Faire apparaître la base locale adaptées à l'étude de  $M_1$  et de  $M_2$ .

**Rép :**  $\ddot{l}_1 + \omega^2(K - 1)l_1 = \omega^2 K l_2$  et  $\ddot{l}_2 + \omega^2(2K - 1)l_2 = \omega^2 K(l_1 + l_0)$

1. Le coefficient de frottement  $f$  dépend des matériaux en contact mais pas de la surface de contact. Par exemple  $f = 0,6$  pour le contact caoutchouc / bitume

**Ex-M2.11** fil élastique lesté

Un ressort de masse négligeable, de raideur  $k$  et de longueur au repos  $l_0$ , est fixé par ses extrémités en deux points  $A$  et  $B$  de même altitude et distants de  $d$ . Il est lesté en son milieu par un objet quasi ponctuel  $M$  de masse  $m$ .

→ Caractériser la position d'équilibre (par exemple  $\theta$ , angle que font les forces de rappel  $\vec{T}_A$  et  $\vec{T}_B$  des deux parties du ressort sur  $M$  avec l'horizontale).

**Données :**  $m = 2,0 \text{ kg}$ ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ ;  $k = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N.m}^{-1}$ ;  $l_0 = 1,0 \text{ m}$ ;  $d = 80 \text{ cm}$ .

**Rappel du cours M2 :** En plaçant  $M$  au milieu du ressort  $[AB]$  ( $k, l_0$ ), on sait qu'on peut le remplacer par un ressort  $[AM]$   $\{k_A = k_0, l_{A0} = \frac{l_0}{2}\}$  en série avec un ressort  $[MB]$   $\{k_B = k_0, l_{B0} = \frac{l_0}{2}\}$  tel que  $k_0$  s'exprime facilement en fonction de  $k$ .

► **Solution :** Faire un schéma précis avec des notations claires après avoir lu l'énoncé. Y faire apparaître les trois forces qui s'exercent sur  $M$  à l'équilibre.

Projeter le **P.F.D.** à l'équilibre dans le repère  $(Oxz)$  où  $(Ox)$  est l'horizontale,  $Oz$  la verticale ascendante et  $O$  milieu de  $[AB]$ .

En déduire que les deux moitiés de ressort exercent des tensions identiques d'intensité  $T_A = T_B = \frac{mg}{2 \sin \theta}$ .

Que vaut la constante de raideur d'un ressort de longueur à vide la moitié de celle d'un d'un ressort de raideur  $k$ ?

En déduire que :  $\frac{mg}{2k} = |d \tan \theta - l_0 \sin \theta|$ .

Si on fait l'hypothèse des petits angles :

$\theta \approx \frac{mg}{2k|d - l_0|}$ . Les données de l'énoncé donnent alors  $0,49 \text{ rad} = 28^\circ$ , qui n'est pas un petit angle → il faut donc résoudre numériquement la première expression.

On trouve  $\theta \approx 0,79 \text{ rad}$ .

**Ex-M2.12** Point sur une tige en rotation uniforme dans

$\mathcal{R}_T$

Une tige  $OP$  rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante  $\omega$ . Cette tige forme un angle constant  $\alpha$  avec l'axe vertical  $(Oz) = (\Delta)$ .

Un point matériel de masse  $m$  pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

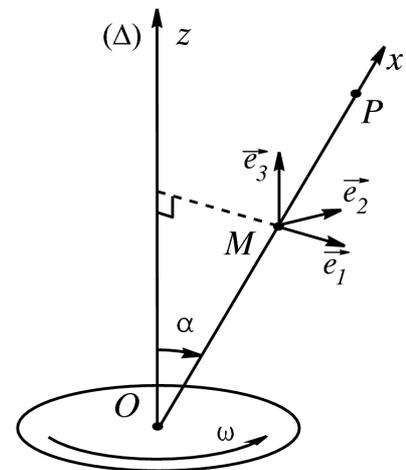
En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

- 1) préciser la position  $x_e$  de l'équilibre relatif;
- 2) donner les composantes  $R_1, R_2$  et  $R_3$  de la réaction  $\vec{R}$  dans la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  liée à la tige.

**Conseil :** Reconnaître la nature de la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  avant toute autre chose.

**Rép :**

$$1) x_e = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}; \quad 2) R_1 = -\frac{mg \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad R_2 = 0 \quad R_3 = mg$$

**Ex-M2.13** Tir balistique sans frottement

Un obus sphérique de masse  $m$  assimilé à un point matériel  $M$  est lancé dans l'air avec une vitesse  $\vec{v}_0$  depuis le point  $O$ , origine du repère  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen.

La vitesse  $\vec{v}_0$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale  $Ox$  dans le plan  $Oxz$ . Le champ de pesanteur  $\vec{g}$  est supposé uniforme et  $Oz$  est la verticale ascendante du lieu. On néglige tout frottement.

- 1) Déterminer l'équation de la trajectoire.
- 2) Déterminer la flèche de la trajectoire (altitude maximale atteinte). Pour quel angle  $\alpha$  la flèche est-elle maximale?
- 3) Déterminer la portée  $D$  (distance entre  $O$  et le point de chute sur le plan horizontal  $z = 0$ ). Pour quel angle  $\alpha$  la portée  $D$  est-elle maximale?

Calculer pour cet angle la portée et la flèche de la trajectoire.

4) Comment choisir l'angle de tir  $\alpha$  pour que la trajectoire passe par un point A de coordonnées  $(x_A, y_A)$  ?

Définir la parabole de sûreté.

**Données :**  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ;  $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$ .

**Rép :** Cf. p.

### Ex-M2.14 Tir balistique avec force de frottement proportionnelle à la vitesse

On reprend les données de l'exercice précédent en supposant, cette fois, que l'obus est soumis à une force de frottement (traduisant la résistance de l'air) du type :  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$  en plus de son poids.

1) Déterminer les composantes  $(v_x(t); v_z(t))$  du vecteur vitesse  $\overrightarrow{v_{m/\mathcal{R}_g}} = \vec{v}$  à chaque instant.

2) Déterminer les composantes  $(x(t); y(t))$  du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  à chaque instant.

3) Déterminer et calculer la flèche de la trajectoire.

4) Montrer que la trajectoire tend vers une asymptote verticale dont on précisera la position.

5) Montrer que la vitesse de l'obus tend vers une limite que l'on déterminera.

6) Tracer l'allure de la trajectoire.

**Données :**  $\alpha = 45^\circ$ ;  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ;  $v_0 = 30 \text{ m.s}^{-1}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$ ;  $\lambda = 0,1 \text{ kg.s}^{-1}$ .

**Rép :** cf. p.

### Solution Ex-M2.13

1) • **Système étudié :** obus sphérique assimilé à un point matériel  $M$  ( $m$ ).

• **Référentiel d'étude :** le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen lié au repère d'espace  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

• **Le bilan des forces** appliquées au point  $M$  se réduit au seul poids  $\vec{P} \equiv m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$ .

• Application du **P.F.D.** au point  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$  :

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \vec{P} \quad \Rightarrow \quad m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = m \vec{g}$$

En simplifiant par  $m$  et en intégrant vectoriellement, on obtient :  $\vec{v}(t) = \vec{g} t + \vec{K}$

$\vec{K}$  est une constante vectorielle qui s'obtient en considérant les **Conditions Initiales** ; or, à  $t = 0$ , on a  $\vec{v}(t=0) \equiv \vec{v}_0 = \vec{K}$ . Donc :  $\vec{v}(t) = \vec{g} t + \vec{v}_0$

• Comme  $\vec{v} \equiv \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g}$ , l'équation précédente peut s'intégrer à nouveau par rapport au temps :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g} \frac{1}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{K}'$$

Où  $\vec{K}'$ , constante d'intégration vectorielle, s'obtient elle aussi grâce aux conditions initiales (à

$t = 0$ ) :  $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0} = \vec{K}'$ , soit :  $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{g} \frac{t^2}{2} + \vec{v}_0 t$

• Cette équation vectorielle sur  $\overrightarrow{OM}(t) \equiv x(t) \vec{e}_x + z(t) \vec{e}_z$  peut se projeter selon les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  :

◦ en projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient :  $x(t) = v_0 \cos \alpha . t$  ①

◦ en projetant selon  $\vec{e}_y$ , on obtient :  $y(t) = 0$

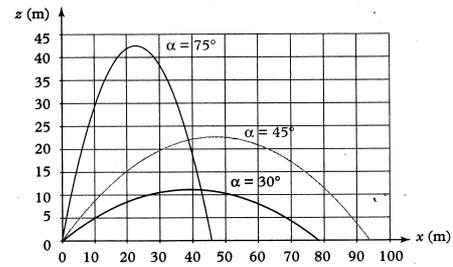
◦ en projetant selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :  $z(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha . t$  ②

• L'équation de la trajectoire s'obtient « en éliminant le temps » :

$$\textcircled{2} \xrightarrow{\textcircled{1}} z = -\frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad \textcircled{3}$$

**Conclusion :** La trajectoire est une portion de parabole.

La figure ci-contre représente trois trajectoires obtenues pour différents angles  $\alpha$  ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $75^\circ$ ).



2) • La flèche est atteinte lorsque la vitesse verticale s'annule.

En projetant l'équation  $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{v}_0$  sur  $\vec{e}_z$ ,

on obtient :  $v_z = -gt + v_0 \sin \alpha$  qui s'annule pour  $t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ .

• Ainsi la flèche de la trajectoire est le point  $F(x_F, z_F)$  dont les coordonnées sont obtenues en remplaçant  $t$  par  $t_F$  dans les relations ① et ② :

$$x_F = x(t_F) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \quad \text{④} \quad \text{et} \quad z_F = z(t_F) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{⑤}$$

3) • La portée est atteinte lorsque  $z = 0$ ; on obtient donc cette portée en cherchant la solution à l'équation suivante :

$$\text{②} \xrightarrow{z=0} -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

• La solution  $x = 0$  est à écarter puisqu'elle correspond au point de départ du tir. La portée est donc la seconde solution :

$$D = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \tan \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \equiv 2x_F \quad \text{⑥}$$

• Pour que la portée soit maximale, il faut qu'elle soit solution de  $\left(\frac{dD}{d\alpha}\right) = 0$ , soit  $\cos(2\alpha) = 0$ , soit  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  (et pas autre chose puisque  $\alpha$  est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ); donc :

$$\alpha_m = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \quad \Leftrightarrow \quad D = D_m = \frac{v_0^2}{g}$$

• **AN :**  $D_m = 91,7 \text{ m}$ ; et pour la valeur correspondante de  $\alpha$  ( $45^\circ$ ), on a  $z_F = 22,9 \text{ m}$  et  $x_F = 45,9 \text{ m}$  (cf. Graphique).

4) On veut atteindre  $A(x_A, z_A)$  en gardant  $\|\vec{v}(t=0)\| = v_0$  :

A doit donc appartenir à la trajectoire :  $z_A = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_A^2 + \tan \alpha x_A$

De plus, on sait que  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

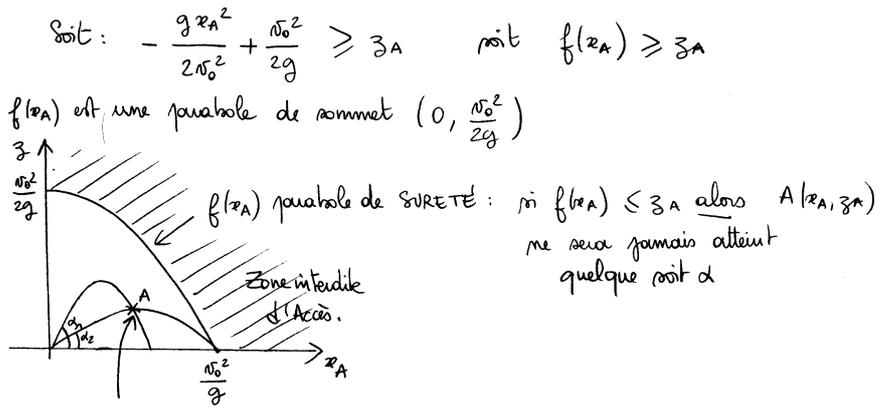
$$\text{d'où} \quad +\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) x_A^2 - \tan \alpha x_A + z_A = 0$$

$$\frac{g x_A^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x_A \tan \alpha + \left( \frac{g x_A^2}{2v_0^2} + z_A \right) = 0 \quad (7)$$

$$\text{Eq du 2}^\text{d} \text{ degré en } \tan \alpha \text{ de discriminant } \Delta = x_A^2 - 4 \frac{g x_A^2}{2v_0^2} \left( \frac{g x_A^2}{2v_0^2} + z_A \right)$$

Pour avoir une solution  $\tan \alpha$  réelle il faut  $\Delta \geq 0$  (8)

$$\text{Soit} \quad 1 - \frac{2g}{v_0^2} \left( z_A + \frac{g x_A^2}{2v_0^2} \right) \geq 0 \quad \text{soit} \quad \frac{v_0^2}{2g} \geq z_A + \frac{g x_A^2}{2v_0^2}$$



Le point A est atteint lorsque (7) et (8) sont vérifiées, c'est-à-dire

pour  $\left\{ \begin{array}{l} z_A < \frac{v_0^2}{2g} \\ \text{tangente seule de (7)} \end{array} \right.$   $\Delta = x_A^2 - \frac{g^2 x_A^4}{v_0^4} \left( 1 + \frac{2v_0 z_A}{g x_A^2} \right)$

$\tan \alpha = \frac{x_A \mp \sqrt{\Delta}}{\cancel{\frac{g x_A^2}{2v_0^2}}}$

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{g x_A} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_A^2} - \left( 1 + \frac{2v_0 z_A}{g x_A^2} \right)}$$

 $\rightarrow (\alpha_1, \alpha_2)$

**Solution Ex-M2.14**

1) • **Système étudié** : obus sphérique assimilé à un point matériel  $M$  ( $m$ ).

• **Référentiel d'étude** : le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen lié au repère d'espace  $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

• **Le bilan des forces** appliquées au point  $M$  se réduit au poids  $\vec{P} \equiv m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$  et à la force de frottement de l'air  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ .

• Application du **P.F.D.** au point  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$  :

$$m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_g}} = \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow m \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{g} - \lambda\vec{v} \Rightarrow \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} + \frac{\lambda}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

• En définissant une constante temporelle  $\tau \equiv \frac{m}{\lambda}$ , l'équation différentielle sur  $\vec{v}$  devient :

$$\left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{A} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\vec{g}$$

•  $\vec{A}$  est une constante vectorielle d'intégration qu'on détermine grâce aux conditions initiale ( $t = 0$ ) : en effet, puisque  $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$ , on a :

$$\vec{v}_0 = \vec{A} + \tau\vec{g} \Rightarrow \vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \tau\vec{g}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\vec{g} \quad \textcircled{1}$$

• Pour déterminer les composantes ( $v_x(t); v_z(t)$ ) du vecteur vitesse, il suffit de projeter  $\textcircled{1}$  :

◦ en projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient :  $v_x(t) = v_0 \cos \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$   $\textcircled{2}$

◦ en projetant selon  $\vec{e}_y$ , on obtient :  $v_y(t) = 0$

◦ en projetant selon  $\vec{e}_z$ , on obtient :  $v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \tau g$   $\textcircled{3}$

2) Les composantes ( $x(t); y(t)$ ) du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  peuvent s'obtenir :

(a) en intégrant  $\textcircled{2}$  et  $\textcircled{3}$  par rapport au temps puis en appliquant les conditions initiales (**C.I.**)

(b) en intégrant directement l'équation vectorielle ①, en appliquant les CI, puis en projetant selon  $Ox$  et  $Oz$ .

Cette dernière méthode a l'avantage de ne passer que par un seul calcul de primitive. Ainsi, une primitive vectorielle de ① est :

$$\overrightarrow{OM}(t) = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau \vec{g} \cdot t + \vec{B}$$

Or, les **C.I.** imposent :  $\overrightarrow{OM}(t=0) \equiv \vec{0} = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) + \vec{B} \Leftrightarrow \vec{B} = \tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g})$

Soit : 
$$\overrightarrow{OM}(t) = -\tau(\vec{v}_0 - \tau \vec{g}) \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right) + \tau \vec{g} \cdot t$$

○ en projetant selon  $\vec{e}_x$ , on obtient : 
$$x(t) = -\tau v_0 \cos \alpha \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right) \quad \text{④}$$

○ en projetant selon  $\vec{e}_z$ , on obtient : 
$$z(t) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) \left( \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - 1 \right) - \tau g \cdot t \quad \text{⑤}$$

**3) •** La flèche  $F(x_F, z_F)$  de la trajectoire est obtenue au moment où la vitesse s'annule selon  $\vec{e}_z$ , soit lorsque :  $v_z - (t_F) = 0 \xrightarrow{\text{③}} (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp\left(-\frac{t_F}{\tau}\right) = \tau g$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_F}{\tau}\right) = \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} \quad \text{⑥} \quad \Leftrightarrow \quad t_F = \tau \ln\left(\frac{v_0 \sin \alpha + \tau g}{\tau g}\right) = \tau \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right) \quad \text{⑦}$$

• En reportant ⑥ dans ④ et ⑤, on obtient les coordonnées de la « flèche » :

$$\text{④} \xrightarrow{\text{⑥}} x_F = x(t_F) = -\tau v_0 \cos \alpha \left( \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right)$$

Soit : 
$$x_F = \frac{\tau v_0^2 \sin(2\alpha)}{2(\tau g + v_0 \sin \alpha)} \quad \text{AN : } x_F = 37,7 \text{ m}$$

$$\text{⑤} \xrightarrow{\text{⑥, ⑦}} z_F = z(t_F) = -\tau(v_0 \sin \alpha + \tau g) \left( \frac{\tau g}{\tau g + v_0 \sin \alpha} - 1 \right) - \tau^2 g \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right)$$

Soit : 
$$z_F = \tau v_0 \sin \alpha - \tau^2 g \ln\left(1 + \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau g}\right) \quad \text{AN : } z_F = 20,1 \text{ m}$$

• **Rque** : On constate que l'abscisse  $x_F$  et l'altitude  $z_F$  de la flèche sont plus petites que dans le cas où il n'y a pas de frottement (cf. AN de **Ex-M2.13**) : cela est bien cohérent avec l'action d'une force de frottement ...

**4) •** Lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , alors  $x(t) \rightarrow \tau v_0 \cos \alpha$ . Ce comportement correspond à l'existence d'une **asymptote verticale**.

• **AN** :  $x_\infty = \tau v_0 \cos \alpha = 212,1 \text{ m}$ .

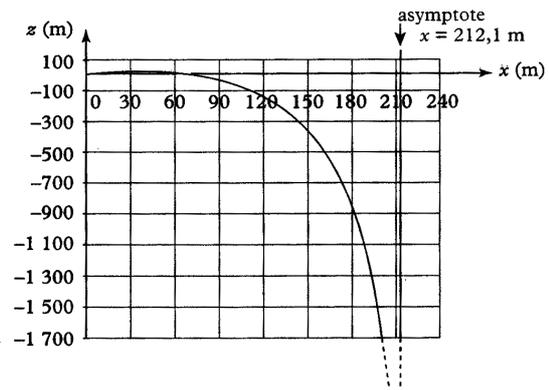
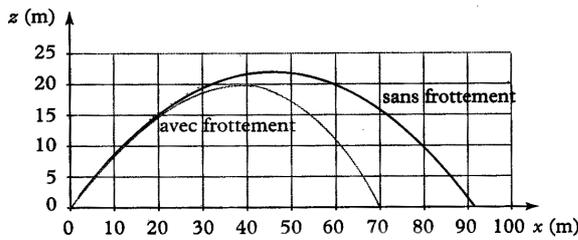
**5)** Il suffit de reprendre ① pour constater que lorsque  $t \rightarrow \infty$ , alors  $\vec{v} \rightarrow \tau \vec{g}$  :

$$\vec{v}_\infty = \tau \vec{g} = \tau g \vec{e}_z \quad \text{AN : } v_\infty = \tau g = 98,1 \text{ m.s}^{-1}$$

**6)** Sur un dessin de trajectoire qui se limite aux altitudes positives :

(a) on retrouve une flèche plus basse que dans le cas du tir balistique sans frottement,

(b) mais on ne perçoit pas l'asymptote verticale car celle-ci est atteinte pour une position  $x_\infty = 212,1 \text{ m}$  bien supérieure à la portée  $D$  de la trajectoire ( $D \simeq 70 \text{ m}$ ).



Si on prolongeait les courbes, on verrait apparaître l'asymptote  $x = 212,1 \text{ m}$  →

## ■ travail, énergie potentielle, énergie cinétique et énergie mécanique

### Ex-M3.1 Chute verticale avec frottement :

Une masse ponctuelle  $m = 200 \text{ g}$  est lancée vers le haut depuis le point  $A$  avec une vitesse initiale  $v_A = 10 \text{ m.s}^{-1}$ .

En supposant la force de frottement verticale, d'intensité constante  $f = 0,50 \text{ N}$ , calculer (sans calculatrice) :

- 1) La hauteur  $h = AB$  dont elle est montée
- 2) sa vitesse  $v'_A$  quand elle repasse par le point de lancement.

**Données :** On oriente la verticale  $Oz$  vers le haut.  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,77$ .

**Rép :** Corrigé complet sur le Blog

**BLOG** 1)  $h = z_B - z_A = \frac{v_A^2}{2\left(g + \frac{f}{m}\right)} = 4,0 \text{ m}$ ; 2)  $v'_A = v_A \sqrt{\frac{mg - f}{mg + f}} \approx 7,7 \text{ m.s}^{-1}$ .

### Ex-M3.2 Vitesse d'un pendule

On accroche une bille de masse  $m = 200 \text{ g}$  au bout d'un fil de masse négligeable et de longueur  $l = 1 \text{ m}$ .

On lâche la bille avec une vitesse nulle dans une position initiale faisant un angle  $\theta_0 = 15^\circ$  avec la verticale.

- 1) Quelle est la vitesse  $v_m$  lors de son passage par la position verticale ?
- 2) Établir par deux méthodes puis calculer la période de ce pendule en supposant que le mouvement vérifie l'hypothèse des petites oscillations.

**Rép :** 1)  $v_m = 0,82 \text{ m.s}^{-1}$ ; 2)  $T_0 = 2,0 \text{ s}$ .

### Ex-M3.3 Vitesse minimale

Un point matériel  $M$  soumis à la pesanteur et à une force de frottement fluide opposée à la vitesse est lancé avec une vitesse initiale inclinée d'un angle  $\alpha$  avec le plan horizontal.

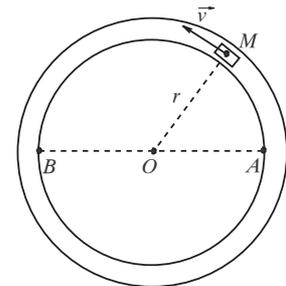
En appliquant seulement le théorème de la puissance cinétique (et sans aucun calcul de trajectoire), montrez que la vitesse (en norme) est minimale **après** le sommet de la trajectoire.

### Ex-M3.4 Frottement fluide

Un véhicule assimilé à un point matériel  $M$ , est en mouvement circulaire (rayon  $r$ ) uniforme (vitesse de norme  $v$ ). La force de frottement fluide agissant sur le véhicule est du type :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ .

→ Déterminer le travail  $W$  de cette force lorsque le véhicule part de  $A$  et arrive en  $B$  après  $n$  tours complets. Commenter le résultat obtenu.

**Rép :**  $W = -\alpha v 2\pi r \left(n + \frac{1}{2}\right)$

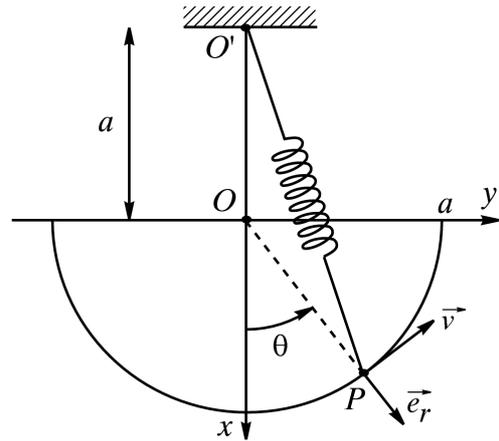


### Ex-M3.5 Glissement d'un solide sur un plan incliné

Résoudre l'exercice **Ex-M2.9** par un raisonnement énergétique.

**Ex-M3.6** Force élastique / stabilité d'un équilibre

Soit un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  de repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . Une perle quasi ponctuelle  $P$ , de masse  $M$  est astreinte à se déplacer sans frottements le long d'un demi-cercle de rayon  $a$ . Le point  $P$  est attaché à un ressort  $(k, l_0)$  dont l'autre extrémité est fixée en  $O'$  ( $OO' = a$ ). le point  $P$  est repéré par l'angle  $\theta = (Ox, OP)$ .



1) a) Exprimer  $\vec{O'P}$  en fonction de  $a$  et  $\theta$  dans la base polaire. En déduire l'expression du module  $O'P$ .

b) exprimer la tension  $\vec{T}$  du ressort en fonction de  $a$ ,  $k$ ,  $l_0$  et  $\theta$  dans la base polaire.

2) a) Comment s'exprime la vitesse de  $P$  dans  $\mathcal{R}_g$  dans la base polaire ?

b) On note  $\vec{F}$  la résultante des forces exercées sur  $P$ . Donner l'expression de la puissance de cette résultante dans  $\mathcal{R}_g$  en fonction de  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ .

En déduire l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  (à une constante près) dont dérive la résultante.

3) a) On suppose les relations suivantes entre les paramètres :  $a = \frac{2Mg}{k}$  et  $l_0 = \sqrt{3} \left( a - \frac{Mg}{k} \right)$ .

→ Quelles sont les positions d'équilibre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  pour  $\theta$  positif ?

b) Étudier la stabilité des équilibres obtenus.

c) Quelle est la période  $T$  des petites oscillations de  $P$  autour de la position d'équilibre stable ?

Rép : 3.a)  $\mathcal{E}_p = Mga \left( \cos \theta - 2\sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} \right)$  et chercher  $\theta_e$  tel que  $\left( \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} \right) (\theta_e) = 0$ ;

3.c) Poser  $\theta = \theta_e + \epsilon$  et montrer que  $\epsilon$  vérifie  $\ddot{\epsilon} + \omega^2 \epsilon = 0$  avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , soit :  $\epsilon(t) = \epsilon_m \cos(t + \varphi)$  avec  $T = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$ .

**Ex-M3.7** Force de gravitation et tunnel terrestre

On démontre que pour tout point  $M$  de masse  $m$  situé à l'intérieur de la Terre, à la distance  $r$  du centre  $O$  de la terre, l'attraction terrestre est une force agissant en ce point  $M$  dirigée vers le centre de la Terre et de valeur :

$$\vec{F} = -mg_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$$

où  $R$  est le rayon de la Terre et  $r = OM$ . ( $R = 6,4 \cdot 10^6$  m et  $g_0 = 10$  m.s<sup>-2</sup>.)

1) Quelle est l'énergie potentielle de  $M$  (en supposant que  $\mathcal{E}_p = 0$  pour  $r = 0$ ) ?

2) On considère un tunnel rectiligne  $AB$ , d'axe  $(Hx)$  ne passant pas par  $O$  et traversant la Terre. On note  $d$  la distance  $OH$  du tunnel au centre de la Terre.

Un véhicule assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  glisse sans frottement dans le tunnel. Il part du point  $A$  de la surface terrestre sans vitesse initiale.

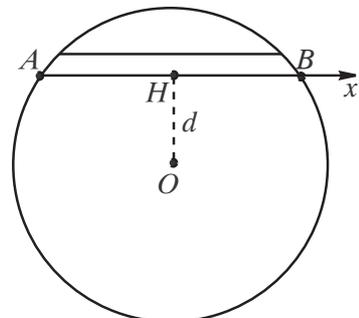
→ Quelle est sa vitesse maximale  $v_m$  au cours du mouvement ? **A.N.** avec  $d = 5 \cdot 10^6$  m.

→ Exprimer  $\overline{HM} = x$  en fonction du temps  $t$  par une méthode énergétique. Retrouver l'expression de  $v_m$ .

3) Représenter et commenter le graphe de  $\mathcal{E}_p(x)$ ;  $\mathcal{E}_p(x)$  étant l'énergie potentielle de gravitation de  $M$ . Décrire le mouvement de  $M$  à partir de sa position initiale en A.

Rép : 1)  $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} r^2$ ; 2)  $v_m = \sqrt{g_0 \left( R - \frac{d^2}{R} \right)} = 5 \cdot 10^3$  m.s<sup>-1</sup> et  $x(t) = -\sqrt{R^2 - d^2} \cos(\omega_0 t)$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R}}$ ;  $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{mg_0}{R} (d^2 + x^2) = ax^2 + b$  et  $\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_{p,\text{max}} = \mathcal{E}_p(A) = \mathcal{E}_p(B)$  ou



encore  $\mathcal{E}_m = \text{Cte} = \mathcal{E}_{k,\max} + \mathcal{E}_{p,\min} = \mathcal{E}_m(H)$ . Oscillations périodiques de période  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

### Ex-M3.8 Planeur :

Un planeur et son pilote (masse totale  $m = 310 \text{ kg}$ ) volent à vitesse constante ( $v_0 = 110 \text{ km.h}^{-1}$ ) en air calme.

- 1) Calculer le travail  $W_0$  des forces de frottements lorsque le planeur descend de  $2200 \text{ m}$  d'altitude à  $700 \text{ m}$ .
- 2) La finesse du planeur est de 38 (la finesse est le nombre de kilomètre(s) parcouru(s) horizontalement pour une perte d'altitude de  $1 \text{ km}$  en air calme). → Calculer l'intensité de la force de frottements  $\vec{f}$ .

On exposera clairement les hypothèses faites et les raisons de leurs choix.

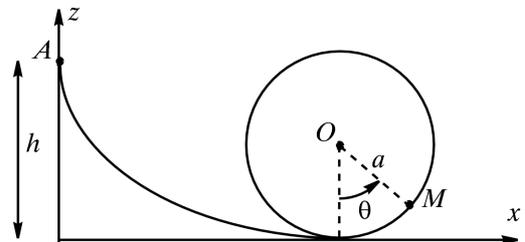
- 3) Dans une « pompe » (courant ascendant qui permet au planeur de prendre de l'altitude), le planeur monte de  $700 \text{ m}$  à  $2200 \text{ m}$  d'altitude. → En supposant que  $W(\vec{f}) = W_0$ , estimer le travail  $W_a$  fourni par les forces des courants ascendants au système {planeur+pilote}.

**BLOG** **Rép :** Corrigé complet sur le Blog 1)  $W_0 = -4,6.10^6 \text{ J}$ ; 2)  $f \approx -80 \text{ N}$ ; 3)  $W_a = -2W_0 \approx -9,1.10^6 \text{ J}$ .

### Ex-M3.9 Toboggan

Un point matériel  $M$  se déplace sans frottements à l'intérieur d'une gouttière circulaire (toboggan terminé par un cercle de rayon  $a$ ). Il est lâché en  $A$ , d'une hauteur  $h$ , sans vitesse initiale. On note  $g$  l'intensité du champ de pesanteur.

- 1) Exprimer en fonction de  $a$ ,  $h$ ,  $g$  et  $\theta$  la norme  $v_M$  de la vitesse du point  $M$  lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.
- 2) De quelle hauteur  $h_{\min}$  doit on lâcher le point matériel sans vitesse initiale en  $A$  pour qu'il arrive jusqu'au point le plus haut du demi-cercle ( $\theta = \pi$ ).
- 3) Dans ces conditions, donner l'expression de la réaction du support au point  $I$  d'entrée du demi-cercle ( $\theta = 0$ ).
- 4) Déterminer les limites  $h_1$  et  $h_2$  telles que :
  - a) si  $h < h_1$ , le point  $M$  effectue des oscillations.
  - b) si  $h_1 < h < h_2$ ,  $M$  quitte la gouttière et chute pour  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ .
  - c) si  $h > h_2$ , le point  $M$  fait des tours complets (si le guide circulaire se poursuit).



**Conseil :** problème unidimensionnel + question sur la vitesse  $\Rightarrow$  utiliser le Thm de l' $\mathcal{E}_k$  entre  $A$  et  $M$ .

**Rép :** 1)  $v_M = \sqrt{2g(h - a(1 - \cos\theta))}$ ; 2)  $h_{\min} = \frac{5a}{2}$ ; 3)  $N(I) = 6mg$ ; 4)  $h_1 = a$  et  $h_2 = h_{\min} = \frac{5a}{2}$ .

### Ex-M3.10 Distance d'immobilisation d'une voiture sur autoroute

Une voiture roule sur une autoroute à la vitesse de  $v'_0 = 130 \text{ km.h}^{-1}$ . On suppose qu'il y a des frottements solides entre la voiture et la route.

On rappelle qu'alors la réaction de la route se décompose en une composante normale  $\vec{R}_N$  et une composante tangentielle  $\vec{R}_T$  de sens opposé à la vitesse et dont la norme vérifie  $R_T = f R_N$  en notant  $f$  le coefficient de frottement.

Il faut  $D' = 500 \text{ m}$  pour que le véhicule s'immobilise lorsqu'on n'exerce aucune force de freinage.

- 1) Calculer la distance de freinage  $D$  si la vitesse initiale était de  $v_0 = 110 \text{ km.h}^{-1}$
- 2) Le résultat est-il modifié si la route fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (la voiture montant ou descendant la pente) ?

**Rép :** 1)  $D = \left(\frac{v_0}{v'_0}\right)^2 D' = 360 \text{ m}$ ; 2) Le résultat est identique que la route soit horizontale

ou non ! (Faire un schéma du plan incliné, exprimer  $R_N$  et  $R_T$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\alpha$  et  $f$  avant d'appliquer le Thm de l' $\mathcal{E}_k$ ).

### Ex-M3.11 Vitesse minimale (\*)

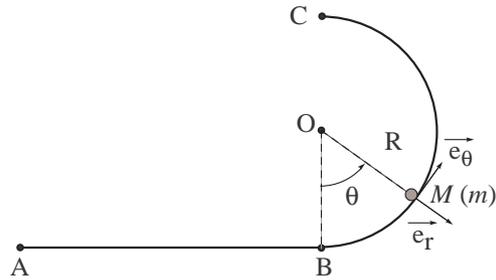
Un solide ponctuel de masse  $m$  est lancé en  $A$  sur une piste horizontale prolongée par un demi-cercle vertical de rayon  $R$ .

On donne :  $AB = 1 \text{ m}$ ;  $R = 1 \text{ m}$ ;  $m = 0,5 \text{ kg}$ ;  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

1) Les frottements étant négligeables, calculer en  $A$  la vitesse minimale  $v_{A,\min}$  que doit avoir la masse pour qu'elle atteigne le point  $C$ .

2) Même question lorsque les frottements entre l'objet et la piste sont assimilables à une force constante de norme  $f = 1 \text{ N}$ .

Rép : 1)  $v_A \geq v_{A,\min}$  avec  $v_{A,\min} = \sqrt{5gR} \simeq 7,1 \text{ m.s}^{-1}$  (Bien entendu, c'était la vitesse de  $M$  au point  $I$  dans la question 3) de l'exercice Ex-M3.9); 2)  $v_{A,\min} = \sqrt{5gR + \frac{2f}{m}(AB + R\pi)} \simeq 8,2 \text{ m.s}^{-1}$ .

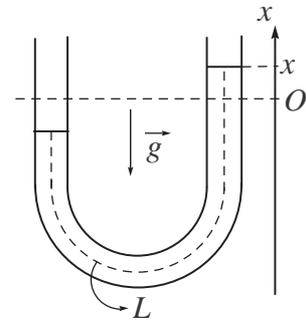


### Ex-M3.12 Oscillations dans un tube en U (\*\*)

Dans un tube en U de section constante, on place un liquide de masse volumique  $\mu$  occupant une longueur totale  $L$ .

Q : Montrer que si on écarte le liquide de sa position d'équilibre et qu'ensuite on le laisse évoluer librement, sans aucun phénomène dissipatif, le liquide effectuera des oscillations sinusoïdales de

pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$ .



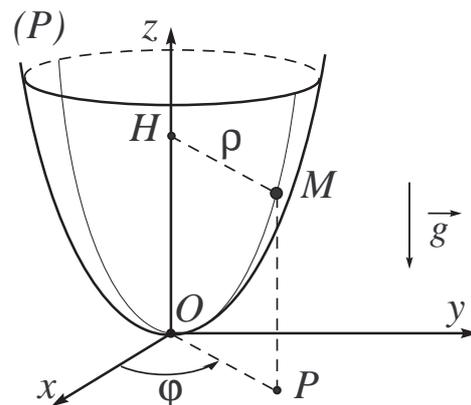
## DL n°6 – Mouvement d'un particule en contact avec une cuvette parabolique (\*) CCP 1999

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , sous l'action du champ de pesanteur  $\vec{g}$ , à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen lié au repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ . La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution  $\mathcal{P}$ , d'axe vertical ascendant  $Oz$ , dont l'équation en coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, z)$  est  $\rho^2 - az = 0$  avec  $a > 0$ .

Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel  $M$  glisse sans frottement sur  $\mathcal{P}$ .

Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de  $M$ ,

la base de projection étant celle des vecteurs de la base cylindrique locale  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .



### 1) Vitesse et accélération de la particule

1.a) Exprimer la vitesse  $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$  du point  $M$  par rapport à  $\mathcal{R}$  dans la base cylindrique.

1.b) En déduire l'expression de l'accélération  $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$  sous la forme :  $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$ .

Justifier que  $a_\varphi$  s'écrit :  $a_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{d(\rho^2 \dot{\varphi})}{dt}$

**1.c)** La réaction  $\vec{R}$  exercée par  $\mathcal{P}$  sur  $M$  est contenue dans le plan  $OHP$  défini par les vecteurs de base  $\vec{e}_\rho$  et  $\vec{e}_\varphi$ .

→ appliquer le **P.F.D.** au point  $M$  dans  $\mathcal{R}$ .

→ par projection de l'équation vectorielle obtenue sur la direction orthogonale au plan  $OHP$  (direction du vecteur  $\vec{e}_\varphi$ ), montrer que :  $\rho^2 \dot{\varphi} = cte$ , cette constante du mouvement étant notée  $C$ .

## 2) Énergie

**2.a)** Quelle est, en fonction des coordonnées et de leur dérivées, l'expression de l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_k$  de la particule  $M$  dans  $\mathcal{R}$  ?

**2.b)** Justifier l'existence d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  dont dérivent les forces extérieures agissant sur  $M$ .

Exprimer  $\mathcal{E}_p$  en fonction de  $\rho$  en supposant que  $\mathcal{E}_p(0) = 0$ .

**2.c)** Que peut-on dire de l'énergie mécanique de  $M$  ?

## 3) Discussion générale du mouvement

**3.a)** Dédurre de ce qui précède une équation du premier ordre, à une seule inconnue, de la forme :

$$\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) + \mathcal{E}_{p,ef}(\rho) = \mathcal{E}_m$$

où  $G(\rho)$  est positif et sans dimension et où  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$  est une énergie potentielle dite «effective». Expliciter  $G(\rho)$  et  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$ .

**3.b)** Représenter l'allure du graphe  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$  en considérant les domaines  $\rho$  «faible» et  $\rho$  «élevé». Montrer que  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$  passe par un minimum pour une valeur  $\rho_m$  de  $\rho$  que l'on exprimera en fonction de  $C$ ,  $m$ ,  $a$  et  $g$ , intensité du champ de pesanteur.

**3.c)** Discuter, à l'aide du graphe de  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$ , la nature du mouvement de  $M$ . En déduire que la trajectoire de  $M$  sur  $\mathcal{P}$  est nécessairement tracée sur une région de  $\mathcal{P}$  limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

## 4) Étude d'un mouvement particulier

Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnées  $\rho$  de la valeur  $\rho_m$  pour laquelle  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho)$  est minimale.

Montrer que  $\epsilon = \rho - \rho_m$  oscille avec une période que l'on calculera dans le cas où  $\rho_m = 1 m$  et  $a = 2 m$ . On rappelle que  $g = 9,81 m.s^{-1}$ .

**Rép :** **2.a)**  $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$ ; **2.b)**  $\mathcal{E}_p = \frac{mg}{a} \rho^2$ ; **3.a)**  $G(\rho) = 1 + 4 \frac{\rho^2}{a^2}$  et  $\mathcal{E}_{p,ef}(\rho) = \frac{mg}{a} \rho^2 + \frac{1}{2} \frac{mC^2}{\rho^2}$ ; **3.b)**  $\rho_m = \left( \frac{aC^2}{2g} \right)^{1/4}$ ; **4)**  $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \epsilon = 0 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{8g} \left( 1 + \frac{4\rho_m^2}{a^2} \right)}$

## ■ Oscillateur harmonique en régime libre

### Ex-M4.1 Oscillateur harmonique spatial

Une particule  $M$  de masse  $m$  décrit la trajectoire elliptique de demi axes  $a$  et  $b$ , de centre  $O$  et d'équation  $\vec{OM} = \vec{r} = a \cos \omega t \vec{e}_x + b \sin \omega t \vec{e}_y$  avec  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  base orthonormée attachée en  $O$ .

**1)** Montrer que la force  $\vec{F}$  agissant sur  $M$  dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$  à déterminer en fonction de  $m$ ,  $r$  et  $\omega$ . Quel est le travail de  $\vec{F}$  entre  $M_1$  ( $OM_1 = r_1$ ) et  $M_2$  ( $OM_2 = r_2$ ) ?

**2)** En  $\omega t = 0$ ,  $M$  est en  $A$ ; en  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ,  $M$  est en  $B$ . Calculer  $\frac{\mathcal{E}_k(A)}{\mathcal{E}_k(B)}$  en fonction de  $a$  et  $b$ .

Vérifier le théorème de l'énergie cinétique entre  $A$  et  $B$ .

**3)** Vérifier que l'énergie mécanique se conserve. Indiquer les positions de  $M$  où  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_p$ .

**Rép :** **1)**  $\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$  avec  $\vec{r} = \vec{OM}$ ;  $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ ;  $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = \frac{1}{2} m \omega^2 (r_1^2 - r_2^2)$ ;

**2)**  $\frac{\mathcal{E}_k(A)}{\mathcal{E}_k(B)} = \left( \frac{b}{a} \right)^2$ ; **3)**  $\omega t = \frac{\pi}{4} \left[ \frac{\pi}{2} \right]$

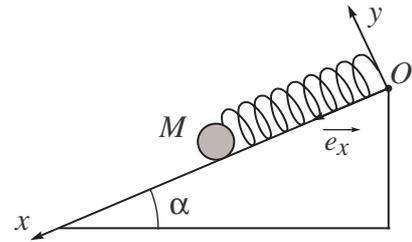
**Ex-M4.2 Ressort incliné**

Soit un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , dont les extrémités sont reliées à un point fixe  $O$  d'un plan incliné et à un point matériel  $M$  de masse  $m$ .

Nous posons  $\overline{OM} = x$  et nous supposons qu'il n'existe pas de frottements de glissement sur le plan incliné.

1) Déterminer  $x_e$  à l'équilibre.

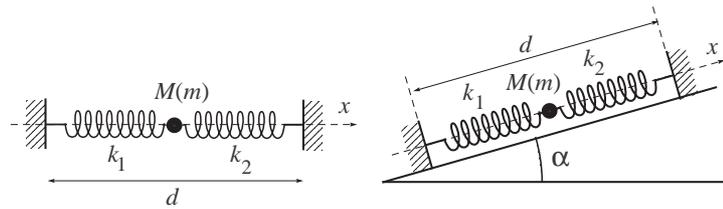
2) À partir de la position d'équilibre,  $M$  est déplacé de  $D$  et relâché sans vitesse initiale. Exprimer  $x$  en fonction de  $t$ .



Rép : 1)  $x_e = l_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$ ; 2)  $x(t) = x_e + D \cos \omega_0 t$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**Ex-M4.3 Deux oscillateurs**

Une masse  $m$  est susceptible de se déplacer sans frottements sur un axe horizontal. Elle est soumise à l'action de 2 ressorts de même longueur à vide  $l_0 = 20 \text{ cm}$  et de constantes de raideur différentes  $k_1$  et  $k_2$ .



On donne :  $m = 4 \text{ kg}$ ;  $k_1 = 100 \text{ N.m}^{-1}$ ;  $k_2 = 300 \text{ N.m}^{-1}$  et  $d = 60 \text{ cm}$ .

1) Déterminer les longueurs des 2 ressorts à l'équilibre.

2) On écarte la masse  $m$  d'une distance  $a_0$  à partir de sa position d'équilibre. Déterminer l'équation différentielle du mouvement en prenant la position d'équilibre comme origine des abscisses. Calculer la période des oscillations. Donner l'expression de l'énergie mécanique de la masse.

3) Les ressorts sont tendus le long d'un plan incliné de  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale  $\rightarrow$  Mêmes questions.

Rép :  $l_1 = \frac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d}{k_1 k_2} = 35 \text{ cm}$  et  $l_2 = d - l_1 = 25 \text{ cm}$ ; 2)  $\ddot{X} + \frac{k_1 + k_2}{m} X = 0$  avec  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$  et  $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)a_0^2$ ; 3)  $l_1 = \frac{(k_1 - k_2)l_0 + k_2 d - mg \sin \alpha}{k_1 k_2} = 34,95 \text{ cm}$  et  $l_2 = d - l_1 = 25,05 \text{ cm}$ ; pour le reste, les résultats sont identiques à la situation précédente!

**Ex-M4.4 Portrait de phase d'un oscillateur harmonique amorti**

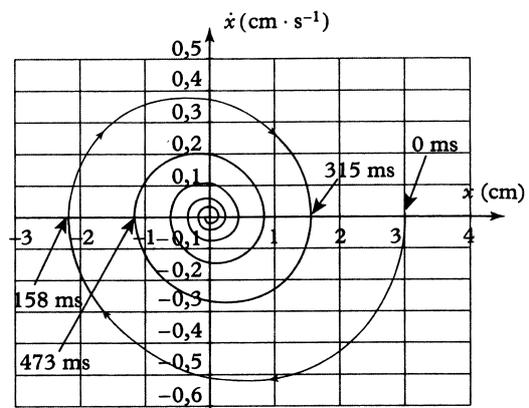
On considère le portrait de phase d'un oscillateur amorti composé d'une masse  $m = 500 \text{ g}$  soumise à une force de rappel élastique (ressort de raideur  $k$ ) et à une force de frottement fluide  $-\lambda \vec{v}$  ( $\vec{v}$  étant la vitesse de la masse  $m$  et  $x$  est l'écart à la position d'équilibre). - L'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

1) Déterminer la nature du régime de l'oscillateur.

2) Déterminer par lecture graphique :

- o la valeur initiale de la position  $x_0$ ;
- o la valeur finale de la position  $x_f$ ;
- o la pseudo-période  $T_a$ ;
- o le décrément logarithmique.

3) En déduire le facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur, sa période propre  $\omega_0$ , la raideur  $k$  du ressort et le coefficient de frottement fluide  $\lambda$ . Applications numériques pour ces quatre grandeurs.



Rép : 2)  $\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t + T_a)}$  : choisir la date  $t$  qui permet de déterminer à la fois  $x(t)$  et  $x(t + T_a)$ ,

$\delta \simeq 0,628$ ; **3)**  $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}$ ;  $k$  s'exprime en fonction de  $m$  et de  $\omega_0$ ;  $\lambda$  s'exprime en fonction de  $m$ ,  $\omega_0$  et de  $Q$ .

### Ex-M4.5 Oscillateur amorti

On considère un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre  $\omega_0 = 100 \text{ rad.s}^{-1}$  et de facteur de qualité  $Q = 10$ ; la masse  $m = 100 \text{ g}$  de cet oscillateur est lâchée avec un écart à la position d'équilibre de  $x_0 = 10 \text{ cm}$  sans vitesse initiale.

**1)** Calculer : **a)** la pseudo-période; **b)** le décrément logarithmique; **c)** l'amplitude des oscillations au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes; **d)** l'énergie mécanique initiale; **e)** l'énergie mécanique au bout de 2, 5 et 10 pseudo-périodes.

**2)** Déterminer le nombre de pseudo-périodes au bout desquelles l'amplitude des oscillations est divisées par 17.

**Rép :** **1.a)**  $T \simeq 62,9 \text{ ms}$ ; **1.b)**  $\delta \simeq 0,314$ ; **1.c)**  $x_2 \simeq 5,34 \text{ cm}$ ,  $x_5 \simeq 2,08 \text{ cm}$ ,  $x_{10} \simeq 0,43 \text{ cm}$ ; **1.d)**  $\mathcal{E}_m(t=0) = 5 \text{ J}$ ; **1.e)**  $\mathcal{E}_m(t=2T) \simeq 1,42 \text{ J}$ ,  $\mathcal{E}_m(t=5T) \simeq 0,22 \text{ J}$ ,  $\mathcal{E}_m(t=10T) \simeq 0,01 \text{ J}$ ; **2)**  $n = 9$ .

### Ex-M4.6 Sismographe

on considère un capteur d'amplitude constitué par un support et une masse  $m$  reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle.

L'amortisseur exerce en  $A$  :  $\vec{F}_A = -h(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$  et le ressort exerce en  $C$  :  $\vec{T}_C = -k(\vec{DC} - \vec{D_0C_0})$ .

Le support, le ressort et l'amortisseur sont de masse négligeable.

Le ressort a pour constante de raideur  $k$  et pour longueur à vide  $l_0$  (notée  $D_0C_0$ ).

On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine animée d'un mouvement sinusoïdal vertical  $x_1 = b \sin \omega t$  par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  ( $(Oxy)$  étant lié à  $\mathcal{R}_0$ ).

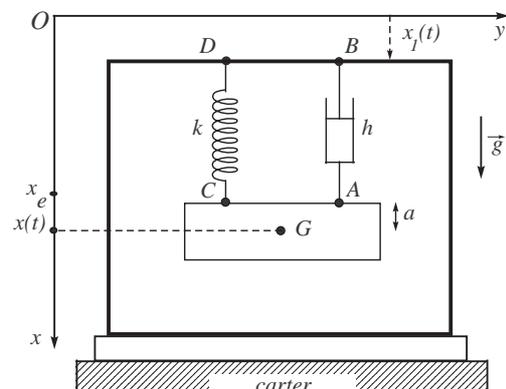
**1)** Déterminer l'équation que vérifie  $x_e$  (position de la masse à l'équilibre dans  $\mathcal{R}_0$  lorsque  $x_1 = 0$ ).

**2)** Écrire l'équation différentielle du mouvement de  $m$  dans  $\mathcal{R}_0$ .

Si on pose  $X = x - x_1 - x_e$ , montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = A \sin \omega t.$$

Résoudre cette équation. (Rque : ceci est le principe du sismographe.)



### Ex-M4.7 Système de deux oscillateurs couplés (\*)

On considère le système suivant où les rois ressorts sont identiques et de constante de raideurs  $k$ . Les positions des masses  $m$  sont repérées par leurs abscisses  $x_1$  et  $x_2$  à partir des positions d'équilibre  $O_1$  et  $O_2$ , positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus (ils sont alors au repos).

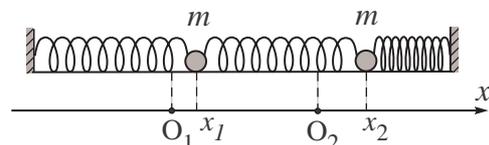
On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses  $x_{1m}$  et  $x_{2m}$  sans vitesse initiale.

**1)** Écrire les équations différentielles du mouvement des deux masses.

**2)** En posant  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , chercher à quelle condition portant sur  $\omega$  il est possible d'avoir des solutions de la forme :  $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi)$  et  $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi)$  ?

**3)** En déduire les deux pulsations propres possibles pour le système et écrire la solution générale du mouvement des deux masses.

**4)** Quelles sont les solutions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du problème? En déduire les conditions sur  $x_{1m}$  et  $x_{2m}$  pour que les mouvements des deux masses soient harmoniques et décrire ces mouvements.



**Rép : 1)**  $m\ddot{x}_1 + 2kx_1 = kx_2$  et  $m\ddot{x}_2 + 2kx_2 = kx_1$ ; **2)**  $(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \omega_0^4$ ; **3)**  $\omega = \omega_0$  ou  $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ ; **4)**  $x_1(t) = \frac{x_{1m} + x_{2m}}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{x_{1m} - x_{2m}}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$  et  $x_2(t) = \frac{x_{1m} + x_{2m}}{2} \cos(\omega_0 t) - \frac{x_{1m} - x_{2m}}{2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t)$  – Pour que les mouvements soient harmoniques, soit  $x_{1m} = x_{2m}$ , soit  $x_{1m} = -x_{2m}$ .

**Ex-M4.8** Ressort vertical soumis à des forces de frottements fluide (\*)

Une sphère de rayon  $r$  faible, animée d'une vitesse  $\vec{v}$  et plongée dans un liquide de coefficient de viscosité  $\eta$  est soumise à une force de frottement qui a pour expression :  $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$  (loi de Stokes).

Une telle sphère de masse volumique  $\rho$  est suspendue à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .

La période des oscillations libres dans l'air est  $T_0$  (on néglige le frottement et la poussée d'Archimède **dans l'air**). Si l'on plonge cette sphère dans un liquide de masse volumique  $\rho_e < \rho$ , la pseudo-période des oscillations est  $T$  (dans ce cas, on ne néglige ni le frottement ni la poussée d'Archimède **dûs au liquide** sur la sphère).

- 1) Retrouver l'expression de la période  $T_0$  en fonction des grandeurs  $k$ ,  $\rho$  et  $r$ .
- 2) Lorsque la sphère est plongée dans le liquide, déterminer la longueur  $x_e$  du ressort à l'équilibre.
- 3) On écarte la sphère de sa position à l'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Soit  $x$  la longueur du ressort à la date  $t$ . Donner l'équation différentielle vérifiée par  $x$ , puis la simplifier en posant  $X = x - x_e$ .
- 4) À quelle condition sur  $k$  le régime est-il pseudo-sinusoïdal ? En déduire alors la pseudo-période  $T_1$ .
- 5) Montrer comment, à partir de la mesure de  $T_0$  et de  $T_1$ , et sans connaître  $k$ , on peut en déduire le coefficient de viscosité  $\eta$  du liquide. Donner la dimension de  $\eta$ .

**Rép : 1)**  $T_0 = 4\pi\sqrt{\frac{\pi r^3 \rho}{3k}}$ ; **2)**  $x_e = l_0 + \frac{4}{3} \frac{\pi r^3 g}{k} (\rho - \rho_e)$ ; **3)**  $\ddot{X} + \frac{9\eta}{2r^2\rho} \dot{X} + \frac{3k}{4\pi r^3 \rho} X = 0$ ;

**4)**  $T_1 = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{3k}{\pi r^3 \rho} - \frac{81\eta^2}{4r^4 \rho^2}}}$ ; **5)**  $\eta = \frac{8\pi r^2 \rho}{9} \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_1^2}}$

**Ex-M4.9** Oscillateur harmonique spatial isotrope (2)

Il s'agit d'une particule  $M$ , de masse  $m$ , élastiquement liée à un point fixe  $O$  (origine d'un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  ( $O$ ,  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$ ,  $\vec{e}_z$ )) par une force  $\vec{F}$  du type  $\vec{F} = -k\vec{OM}$ ,  $k$  étant la constante de raideur.

Le mouvement de  $M$  a lieu dans le plan ( $Oxy$ ), avec les conditions initiales suivantes :

$$\vec{OM}_0 = x_0 \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$$

**1)** On néglige tout frottement de type fluide et on pose  $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

→ Quelles sont les équations paramétriques de la trajectoire du point  $M$  ?

→ En déduire l'équation cartésienne de cette trajectoire et représenter l'allure de cette trajectoire en précisant le sens de parcours.

**2)** On ne néglige plus le frottement fluide exercé sur le point  $M$  au cours du mouvement. À présent, le point  $M$  est soumis à l'action des forces  $\vec{F} = -k\vec{OM}$  et  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ ,  $\alpha$  étant le coefficient de frottement.

On suppose toujours que  $\vec{OM}_0 = x_0 \vec{e}_x$  et  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ . Le point  $M$  se déplace dans le plan ( $Oxy$ ).

→ Déterminer la loi de variation du vecteur position  $\vec{OM}(t)$  dans le cas où  $\alpha = 2m\omega_0$ .

→ Représenter l'allure de cette trajectoire en précisant le sens de parcours.

