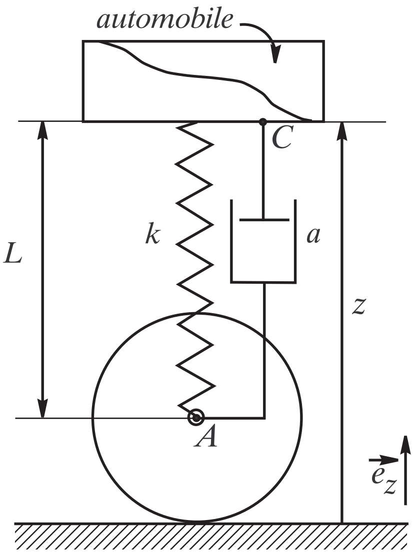
DL n°7 – Comportement Routier d'une Automobile (*)
Concours EIA 1999 [ATS et TSI]

Modèle simplifié de la suspension

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :
- d'un ressort métallique hélicoïdal de *constante de raideur* k et de longueur *à vide* L_0 ;
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de *cœfficient d'amortissement* a.



On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Donc une suspension n'agit que sur le quart de la masse totale du châssis.

Les pneus, de rayon extérieur R, sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude.
Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut ($\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur unitaire vertical).

1) Le véhicule étant immobile, sans freins, sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e des ressorts *au repos* et la garde au sol z_0 du véhicule correspondante ?

2) Lors d'un ***essai dynamique à vide***, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

2.a) Établir l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta \qquad (E)$$

α, β et δ étant des constantes que l'on exprimera en fonction de a, k, M et z_0.

2.b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible.*

Quelle doit être alors la valeur de α en fonction de β ?

En déduire celle de a en fonction de M et k.

2.c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0, h et $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

2.d) Tracer avec soin le graphe $z(t)$. (On prendra pour échelle $z_0 = 1$; $h = \dfrac{z_0}{4}$; $\omega_0 = 1$).

3) On effectue de nouveau le même essai (c'est-à-dire avec les mêmes conditions initiales), mais cette fois on fait un ***essai en charge nominale*** : le véhicule contient quatre masses identiques m également réparties sur les quatre systèmes {ressort-amortisseur}.

À cause de cette masse m au niveau de chaque suspension, la garde au sol n'est plus z_0 mais z'_0. De même la longueur correspondante du ressort n'est plus L_e mais L'_e.

3.a) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$, et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha'\,\dot{z} + \beta'\,z = \delta' \qquad (E')$$

en exprimant les nouvelles constantes α', β' et δ' en fonction de a, k, M, m et z'_0.

3.b) Montrer que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

3.c) Déterminer l'expression de la (pseudo-)période T des oscillations autour de la position d'équilibre final en fonction de k, M et m.
3.d) On souhaite obtenir $T = \frac{\pi}{3}\ s$ pour $M = 1\,000\ kg$ et $m = 100\ kg$. En déduire la valeur de k puis de a.

Indications et réponses partielles : (résultats utilisables pour répondre aux questions suivantes)
1) $L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}$.
2.a) $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{k} = \frac{\delta}{k\, z_0} = \frac{4}{M}$. – **2.b)** $a = \sqrt{kM}$. – **2.c)** $z(t) = z_0 - h(1+\omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$.
3.a) $\frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{k} = \frac{\delta'}{k\, z'_0} = \frac{4}{M+4m}$. – **3.c)** $T = \frac{\pi}{2}\frac{M+4m}{\sqrt{km}}$. – **3.d)** $k = 44\,100\ N.m^{-1}$.

★ Solution Ex-M4.9 ▶

$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \omega_0^2 \overrightarrow{OM} = \vec{0}$, $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$,

$x_{(t)} = x_0 \cos\omega_0 t$, $y_{(t)} = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$, $\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} = 1$,

trajectoire elliptique (Fig.1) ;

$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} + \omega_0^2 \overrightarrow{OM} = \vec{0}$,

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$,

$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$, $\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\,\omega_0^2 = 0$,

$x_{(t)} = x_0(1+\omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}$, $y_{(t)} = v_0\, t\, e^{-\omega_0 t}$,

trajectoire de M en figure 2.

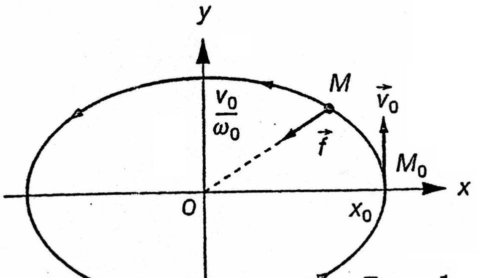


Figure 1

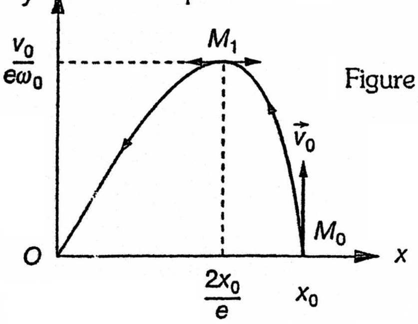


Figure 2

★ Solution Ex-M2.7 ▶

1) et **2)** Le système M est soumis, dans le référentiel terrestre supposé galiléen :
(1) à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$,
(2) à la réaction $\overrightarrow{R}$ du support verticale (puisqu'il n'y a pas de frottements), et (3-4) aux forces de rappel $\overrightarrow{T}_1$ et $\overrightarrow{T}_2$ qu'exercent les deux ressorts en M.

• Le **P.F.D.** s'écrit :
$m\,\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2}$

• Projetons dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$:
$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e_z}$ (avec $R \geq 0$)
$\overrightarrow{T}_2 = -k_2(l_2 - l_{02})\overrightarrow{e_x} = -k_2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{A_0M_0})$
Soit : $\overrightarrow{T_2} = -k_2\overrightarrow{M_0M} = -k_2 x\overrightarrow{e_x}$.
$\overrightarrow{T}_1 = -k_1(l_1 - l_{01})(-\overrightarrow{e_x}) = -k_1(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{B_0M_0})$
Soit : $\overrightarrow{T_1} = -k_1\overrightarrow{M_0M} = -k_1 x\overrightarrow{e_x}$.

• Comme le mouvement de M est horizontal, il faut que la réaction du support compense le poids ($\overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$).
Alors : $m\,\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = -(k_1+k_2)x\,\overrightarrow{e_x}$,
avec $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = \left(\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{\mathcal{R}} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x}$.
D'où : $\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = 0$, soit : $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$
→ On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
Des oscillations sinusoïdales ont lieu autour de la positon d'équilibre stable $x = 0$
avec une pulsation : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_+k_2}{m}}$
et une période : $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}}$

• L'association des deux ressorts est équivalente à un ressort unique de raideur $k = k_1 + k_2$.

3) La solution générale de l'équation différentielle est : $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$.
La vitesse de M est donc :
$\dot{x} = -A\omega_0\sin\omega_0 t + B\omega_0\cos\omega_0 t$
Les deux conditions initiales ($x(t=0) = x_0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$) conduisent à $A = x_0$ et $B = 0$.
D'où : $\boxed{x(t) = x_0\cos\omega_0 t}$

Solution DL n°7 – Comportement routier d'une Automobile

1) À l'équilibre, la tension du ressort d'une des quatre suspensions compense le quart du poids du châssis (le châssis n'est soumis a aucun frottement visqueux puisque la vitesse relative d'un amortisseur est nulle à l'équilibre) :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{T} + \frac{\overrightarrow{P}}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{selon} \overrightarrow{e_z} : \quad 0 = -k(L_e - L_0) - \frac{Mg}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Soit : $\boxed{L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}}$ et $\boxed{z_0 = L_e + R = L_0 - \frac{Mg}{4k} + R}$.

2.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au quart du châssis associé à une suspension :

$$\frac{M}{4}\overrightarrow{a_{\text{chassis}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{T} + \frac{\overrightarrow{P}}{4} + \overrightarrow{F}_{\text{frot}}$$

avec $\overrightarrow{a_{chassis/\mathcal{R}}} = \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$ (mouvement vertical), $\overrightarrow{T} = -k(L - L_0)\,\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot{z}_C - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,\dot{z}_C\overrightarrow{e_z} = -a\,\dot{z}\overrightarrow{e_z}$. Soit, en projection selon $\overrightarrow{e_z}$:

$$\frac{M}{4}\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{Mg}{4} - a\,\dot{z} \quad \textbf{(2)}$$

Soit, en faisant **(2)** – **(1)** : $\frac{M}{4}\ddot{z} = -k(L - L_e) - a\,\dot{z} = -k(z - z_0) - a\,\dot{z}$; d'où :

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta \quad (E) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{4a}{M} \quad \beta = \frac{4k}{M} \quad \delta = \frac{4k}{M}z_0}$$

2.b) Pour que le retour à la position d'équilibre soit le plus rapide possible, il faut qu'il corresponde à un **régime libre critique**.
Le régime critique est obtenu lorsque le discriminant de l'équation caractéristique associé à l'équation différentielle (E) est nul :

$$\delta = \alpha^2 - 4\beta = 0 \iff \boxed{\alpha = 2\sqrt{\beta}} \iff \frac{16\,a^2}{M^2} = 4\,\frac{4k}{M} \iff \boxed{a = \sqrt{k\,M}}$$

2.c) La solution $z(t)$ de (E) se décompose en une solution particulière de l'équation avec second membre (z_P) et de la solution générale de l'équation homogène $(z_G(t))$.

- $\boxed{z_P = z_0}$.

- L'équation caractéristique de (E) $(r^2 + \alpha\,r + \beta = 0)$ admet, pour le régime critique, une racine double :

$$r = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{2a}{M} = -2\sqrt{\frac{k}{M}} \equiv -\omega_0$$

Alors, $\boxed{z_G(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}}$.

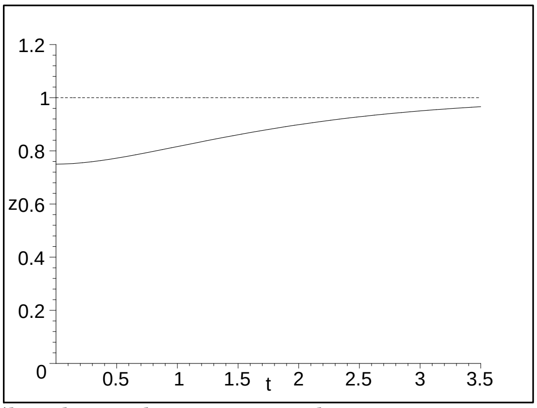
- Ainsi : $z(t) = z_G(t) + z_P = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t} + z_0$.

Les constante d'intégration se déduisent des conditions initiales :
○ $z(t = 0) = z_0 - h = A + z_0 \Rightarrow \underline{A = -h}$;
○ $\dot{z}(t = 0) = 0 = -A\omega_0 + B \Rightarrow \underline{B = A\omega_0 = -h\omega_0}$.

$$\boxed{z(t) = z_0 - h\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}}$$

2.d) $z(t) = z_0 - h\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \dot{z}(t) = h\omega_0^2\,t\,e^{-\omega_0 t} > 0 \Rightarrow \ddot{z}(t) = h\omega_0\,(1 - \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}$.

Ainsi, $z(t)$ est une fonction croissante dont la courbe admet :
∘ une tangente horizontale en $t = 0$ (car $\dot{z}(0) = 0$),
∘ un point d'inflexion M_1 pour $\ddot{z}(t_1) = 0$, soit $M_1\left(t_1 = \dfrac{1}{\omega_0}\,,\ z_1 = z_0 - \dfrac{2h}{e}\right)$,
∘ une asymptote horizontale d'équation $z = z_0$ (retour à l'équilibre).



3.a) La nouvelle équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} \quad \textbf{(1')}$$

(en introduisant la nouvelle longueur à l'équilibre L'_e du ressort correspondant à la nouvelle garde au sol z'_0 du châssis chargé par $4m$).
Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} - a\,\dot{z} \quad \textbf{(2')}$$

Soit, en faisant **(2')** − **(1')**, avec $L - L'_e = z - z'_0$:

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha'\,\dot{z} + \beta'\,z = \delta' \quad (E') \qquad \text{avec} \qquad \alpha' = \frac{4a}{M+4m} \qquad \beta' = \frac{4k}{M+4m} \qquad \delta' = \frac{4k}{M+4m}\,z'_0}$$

3.b) Le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E') est (en se souvenant que $a = \sqrt{kM}\,!$) :

$$\Delta' = \alpha'^2 - 4\beta' = \left(\frac{4a}{M+4m}\right)^2 - 4\,\frac{4k}{M+4m} = \frac{16a^2 - 16k\,(M+4m)}{(M+4m)^2} = -\frac{64\,km}{(M+4m)^2} < 0$$

Ceci correspond à des racines complexes de l'équation caractéristiques, donc à une **solution pseudo-périodique** de (E'), c'est-à-dire à une oscillation sinusoïdale amortie exponentiellement.

3.c) Pour déterminer la pseudo-période, il faut déterminer la pseudo-pulsation qui est la partie imaginaire commune aux deux racines $r_{1/2}$ de l'équation caractéristique :

$$r_{1/2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\,\frac{\sqrt{|\Delta'|}}{2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\omega$$

Soit : $\omega \equiv \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{4\sqrt{km}}{M+4m}$. Donc :

$$\boxed{T = \frac{\pi}{2}\,\frac{M+4m}{\sqrt{km}}}$$

3.d) On veut $T = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{M+4m}{\sqrt{km}} = \dfrac{\pi}{3}\ s$, soit :

$$\boxed{k = \frac{9}{4}\,\frac{(M+4m)^2}{m} = 44\,100\ N.m^{-1}} \quad \text{et donc :} \quad \boxed{a = \sqrt{kM} = 6\,600\ kg.s^{-1}}$$