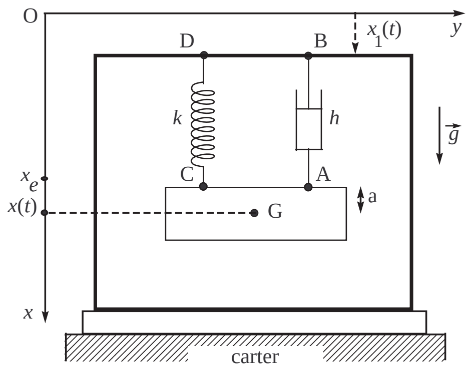
■ Oscillateur harmonique amorti en régime sinusoïdal forcé

Ex-M5.1 Sismographe



on considère un capteur d'amplitude constitué par un support et une masse m reliés par un ressort et un amortisseur en parallèle.
L'amortisseur exerce en A : $\overrightarrow{F_A} = -h\,(\overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B})$
et le ressort exerce en C : $\overrightarrow{T_C} = -k\,(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{D_0C_0})$.
Le support, le ressort et l'amortisseur sont de masse négligeable.
Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide l_0 (notée D_0C_0).
On suppose que le support est solidaire du carter d'une machine animée d'un mouvement sinusoïdal vertical $x_1 = b\sin\omega t$ par rapport à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$ ((Oxy) étant lié à $\mathcal{R}_0$).
1) Déterminer l'équation que vérifie x_e (position de la masse à l'équilibre dans $\mathcal{R}_0$ lorsque $x_1 = 0$).
2) Écrire l'équation différentielle du mouvement de m dans $\mathcal{R}_0$.
Si on pose $X = x - x_1 - x_e$, montrer que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{X} + \omega_0^2 X = A\sin\omega t \qquad \star$$

Résoudre cette équation. (Principe du sismographe.)

Rép : 1) Écrire, pour la masse m, le **P.F.D.** à l'équilibre ① → $x_e = l_0 + \dfrac{mg}{k} + a$
2) Écrire le **P.F.D.** hors équilibre ②; ② − ① → $m\ddot{x} = -k(x(t) + x_1 - x_e) - h(\dot{x} - \dot{x}_1)$.
D'où $\star$ avec $A = b\omega^2$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$, de solution $X(t) = X_m\sin(\omega t + \varphi)$, avec $X_m = \dfrac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\dfrac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left[Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$. Au final : $x(t) = X(t) + x_1(t) + x_e$.

Ex-M5.2 Déphasage de la vitesse par rapport à la force excitatrice

Soit $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = f(t)$ l'équation du mouvement d'un oscillateur soumis à une force excitatrice $f(t) = F_m\cos(\omega t + \psi)$.
→ Calculer, en régime forcé :
1) le déphasage φ_v de la vitesse $v(t)$ par rapport à la force ; en particulier, montrer que :

$$\sin\varphi_v = \frac{\left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega} - \omega\right)V_m}{\dfrac{F_m}{m}} \qquad \text{et} \qquad \cos\varphi_v = \frac{2\alpha V_m}{\dfrac{F_m}{m}}$$

(Que représentent ω_0, V_m et α ?)

2) la travail $\mathcal{T}$ fourni à chaque période T, par la force à l'oscillateur.

Rép : 2) Partir du travail élémentaire fourni par le force excitatrice : $\delta\mathcal{T} = f(t).\mathrm{d}x = f(t).v(t)\mathrm{d}t = F_m\cos(\omega t + \psi).V_m\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \dfrac{F_mV_m}{2}[\cos(\psi - \varphi) + \cos(2\omega t + \psi + \varphi)]\mathrm{d}t$.
Sur une période $\mathcal{T} = \displaystyle\int_0^T \delta\mathcal{T}\ \ldots\ \to \mathcal{T} = \dfrac{hV_m^2}{2}T$

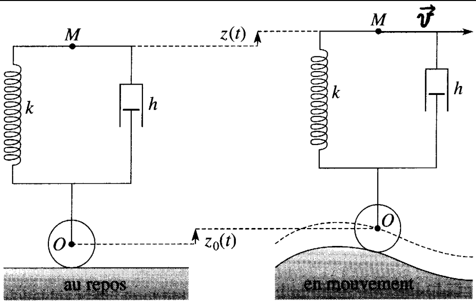
Ex-M5.3 Oscillations forcées d'un véhicule sur une route ondulée

Une automobile est sommairement modélisée par une masse m placée en M et reposant sur une roue de centre O, par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k mis en parallèle sur un amortisseur de coefficient de frottement h. En routes circonstances, l'axe OM reste vertical.
On se propose d'examiner le comportement du véhicule lorsqu'il a la vitesse v sur une route

dont le profil impose au centre O de la roue une élongation

$$z_O(t) = a\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

par rapport à sa position d'équilibre.
On repère le mouvement de la masse par son élongation $z(t)$ par rapport à sa position d'équilibre quand le véhicule est au repos.



On rappelle qu'un amortisseur placé entre O et M exerce sur M une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport à O : $\overrightarrow{F_r} = -h(\dot{z}_M - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$.

1) Établir l'équation différentielle en *z(t)* du mouvement de la masse , lorsque le véhicule se déplace à vitesse constante v.

2) Déterminer l'amplitude du mouvement d'oscillation vertical du véhicule en régime permanent.

3) À quelle allure convient-il de rouler pour que cette amplitude soit aussi faible que possible ?

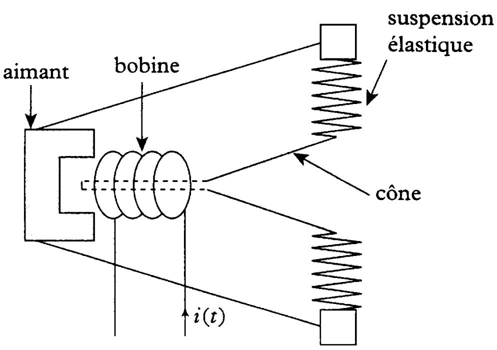
Rép : 1) $m\ddot{z} = -k(z(t) - z_O(t)) - h(\dot{z} - \dot{z}_O)$, avec $z_O = a\cos(\omega t)$, comme $x = v.t$ et en posant $\omega = \dfrac{2\pi v}{\lambda}$; $\ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_O(t) + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{z}_O(t)$, en posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$; **2)**

$$Z_m = \frac{a\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

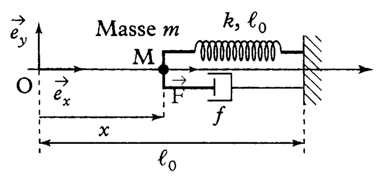
Ex-M5.4 Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur à l'aide d'une masse m, se déplaçant horizontalement sans frottement le long de l'axe $(O, \overrightarrow{e_x})$. Cette masse m, assimilée à un point matériel M (m), est reliée à un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, ainsi qu'à un amortisseur fluide de constante f. Elle est soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur.
On a : $F(t) = K\,i(t)\,\overrightarrow{e_x}$,   avec K une constante.
On travaille dans le référentiel terrestre considéré galiléen $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.
On suppose que le courant $i(t)$ est sinusoïdal : $i(t) = I_m\cos(\omega t)$

Données : $m = 10\,g$; $k = 15\,000\,N.m^{-1}$; $K = 200\,N.A^{-1}$ et $I_m = 1\,A$.



Modèle mécanique



1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la position de la masse m.

2) La normaliser. On veut $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Calculer alors la valeur du cœfficient f.

3) Déterminer l'expression de la réponse forcée $x(t)$ et la mettre sous la forme $X_m\cos(\omega t + \varphi)$.
Donnée : $\omega = 6\,280\,rad.s^{-1}$

4) Tracer l'allure de la courbe donnant $\omega \to X_m(\omega)$. En déduire la bande passante du système.

Rép : 1) $\ddot{x} + \dfrac{f}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = \dfrac{K}{m}I_m\cos(\omega t)$; **2)** $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{f} = \dfrac{\sqrt{km}}{f}$
A.N. : $f \simeq 17,3\,kg.s^{-1}$ (ou $N.s.m^{-1}$) ; **3)** $\omega_0 \simeq 1\,225\,rad.s^{-1}$, $\omega = 6\,280\,rad.s^{-1}$, $X_m = 0,5\,mm$ et $\varphi = -164° = -2,86\,rad$, soit : $x(t) = 0,5.10^{-3}\cos(6\,280t - 2,86)$ (en m) ;
4) $X_m(\omega_c) = \dfrac{KI_m}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_c^4}{\omega_0^4}}} = \dfrac{X_m(\max)}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \omega_c = \omega_0$

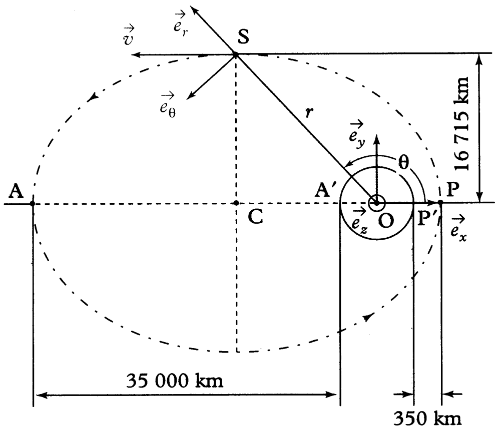
Ex-M5.5 **Pourquoi le ciel est-il bleu ?**
THOMSON a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) (il est soumis à une force de rappel passant par le centre de l'atome ; $\overrightarrow{F_e} = -k\,\overrightarrow{OM}$). Nous supposerons que ce électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnelle à sa vitesse $\overrightarrow{F_r} = -h\,\overrightarrow{v}$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. Nous cherchons à étudier l'action d'une onde lumineuse caractérisée par un champ électrique $\overrightarrow{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_x}$, de pulsation ω (provenant du Soleil) sur un électron d'un atome de l'atmosphère, représenté à l'aide du modèle de THOMSON.
6 Données : $m = 9,1.10^{-31}\,kg$; $e = 1,6.10^{-19}\,C$; $k = 100\,N.m^{-1}$; $h = 10^{-20}\,kg.s^{-1}$.
1) Écrire l'équation différentielle vectorielle du mouvement de l'électron, puis la normaliser. (« la normaliser »= comprendre qu'il faut l'écrire sous sa forme « canonique »).
2) Déterminer le régime forcé (solution particulière de l'équation différentielle).
3) Simplifier l'expression précédente sachant que le rayonnement visible provenant du Soleil possède des longueurs d'onde s'étendant de $\lambda_b = 400\,nm$ (bleu) à $\lambda_r = 800\,nm$ (rouge), longueurs d'onde du champ $\overrightarrow{E}(t)$.
4) Sachant que l'électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Rép : 1) $\ddot{\overrightarrow{OM}} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{\overrightarrow{OM}} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = -\dfrac{e}{m}\overrightarrow{E}(t)$, avec $\omega_0 = \sqrt{k m}$ et $Q = \dfrac{m\omega_0}{h}$; **2)** $\overrightarrow{OM}(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}$, avec $X_m = \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + \dfrac{1}{Q^2}\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$;
3) $\lambda_{b/r} = \dfrac{2\pi c}{\omega_{b/r}}$ (➜ Cf Cours **O1.I.1.a)** : $\lambda = c.T = c.\dfrac{2\pi}{\omega}$), comparer les valeurs de ω_b, ω_r avec celle de ω_0, en déduire : $X_m \simeq \dfrac{eE_0}{m\omega_0^2}$ et $\varphi \simeq \pi$; **4)** Comme $\ddot{\overrightarrow{OM}} \simeq \dfrac{e\omega^2}{m\omega_0^2}E_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$, on a $< \mathcal{P}_{b/r} > = K \times$ (amplitude de l'accélération)$^2 = K\left(\dfrac{e\omega_{b/r}^2}{m\omega_0^2}E_0\right)^2$, soit $\dfrac{< \mathcal{P}_b >}{< \mathcal{P}_r >} = \left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_b}\right)^4 = 16$.

■ Théorème du moment cinétique

M6

Ex-M6.1 **Moment cinétique d'un satellite**
Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse $m = 1\,tonne$, décrit une trajectoire elliptique autour de la terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction fravitationnelle $\overrightarrow{F}$ dirigée vers le centre de force O, centre d'inertie de la Terre.
Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g\,(Oxyz)$ est supposé galiléen.
À l'instant représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiele st : $v = 14\,650\,km.h^{-1}$.
Donnée : la rayon de la Terre est : $R_T = 6\,400\,km$.

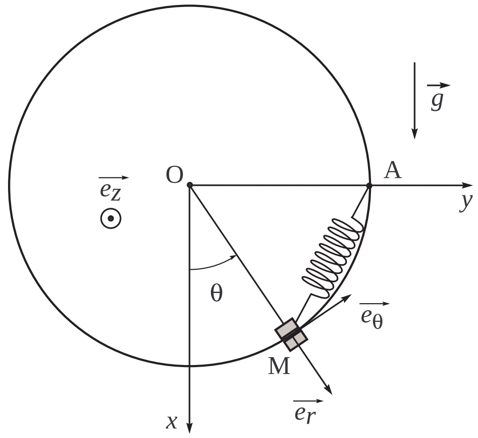


1) calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans $\mathcal{R}_g$ à l'instant considéré.
2) À l'aide du Théorème du Moment Cinétique, donner la valeur de la vitesse du satellite :
◦ à son apogée A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre),
◦ à son périgée P (point de la trajectoire le plus proche de la Terre).

Rép : 1) $L_O \simeq 6,8.10^{13}\ kg.m^2.s^{-1}$.
2) $v_A = \dfrac{L_O}{m(AA' + R_T)} \simeq 5,9.10^3\ km.h^{-1}$ et $v_P = \dfrac{L_O}{m(R_T + PP')} \simeq 3,6.10^4\ km.h^{-1}$.

Ex-M6.2 Trois méthodes pour l'étude d'un même mouvement

Un point matériel de masse m est assujetti à glisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R et de centre O. Il est lié au point A par un ressort de raideur k et de longueur au repos négligeable.



1) Établir l'équation du mouvement du mobile en utilisant successivement les trois méthodes suivantes :

a) le théorème du moment cinétique ;

b) la relation fondamentale de la dynamique ;

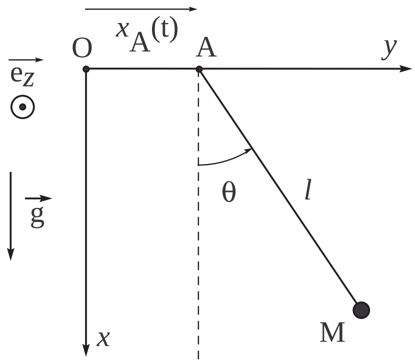
c) le bilan énergétique.

2) Discuter l'existence de positions d'équilibre, leur stabilité, et dans l'affirmative, la période des petites oscillations au voisinage de l'équilibre.

Rép : 1) $\ddot{\theta}+\omega_1^2\sin\theta-\omega_0^2\cos\theta=0$; **2)** $\theta_1=\arctan\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2}$ (Éq. stable) et $\theta_2=\theta_1+\pi$ (Éq. instable).

Ex-M6.3 Théorème du moment cinétique appliqué à un point mobile

Prenons un pendule simple, de masse m et de longueur l, et imposons de petites oscillations horizontales à son extrémité A : $x_A=x_0\sin\omega t$.



1) Pour utiliser le théorème du moment cinétique, pourquoi vaut-il mieux l'appliquer au point mobile A plutôt qu'au point fixe O ?

Reprendre alors la démonstration du théorème pour exprimer la dérivée : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_g}$

2) Établir l'équation du mouvement du pendule simple effectuant de petites oscillations.

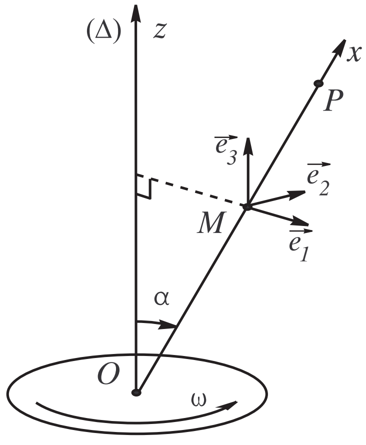
3) Quel est son mouvement lorsqu'un régime sinusoïdal permanent s'est établi (ce qui suppose quelques frottements, que nous avons en fait négligés)

4) Quelle est la pulsation ω_0 au voisignage de laquelle nos hypothèses d'étude sont à reprendre ? Que dire des mouvements du point A et du mobile selon que $\omega<\omega_0$ ou que $\omega>\omega_0$?

Rép : 1) $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{A/\mathcal{R}_g}(M)}}{\mathrm{d}}\right)_{\mathcal{R}_g}=\overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\overrightarrow{F})+m\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}\times\overrightarrow{v}_{A/\mathcal{R}}$; **2)** $\ddot{\theta}+\omega_0^2\theta=\omega^2\dfrac{x_0}{l}\sin(\omega t)$ avec $\omega_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; **3)** $\theta(t)=\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\dfrac{x_0}{l}\sin(\omega t)$.

Ex-M6.4 Tige soudée à un plateau tournant (➜ Cf Ex-M2.12 pour 1))

Une tige OP rigide est soudée sur un plateau tournant à vitesse angulaire constante ω. Cette tige forme un angle constant α avec l'axe vertical $(Oz)=(\Delta)$.



Un point matériel de masse m pouvant glisser sans frottement est en équilibre relatif sur la tige.

1) En utilisant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

a) préciser la position x_e de l'équilibre relatif ;

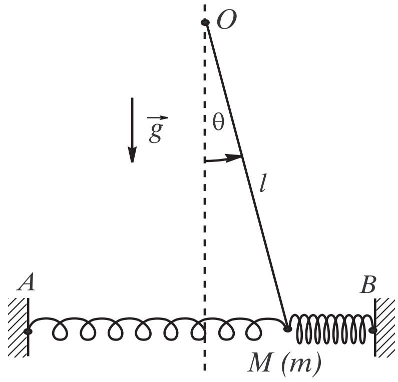
b) donner les composantes R_1, R_2 et R_3 de la réaction $\overrightarrow{R}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ liée à la tige.

2) Écrire le théorème du moment cinétique en H, puis en O. Vérifier ainsi les résultats précédents.

Rép : 1.a) En projetant le **P.F.D.** selon $\overrightarrow{e_x}$, il vient $x_e = \dfrac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$; **1.b)** $R_1 = -\dfrac{mg\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{mg}{\tan\alpha}$; $R_2 = 0$; $R_3 = mg$; **2)** $\overrightarrow{L_{H/\mathcal{R}_T}}(M) = mr^2\omega\overrightarrow{e_z}$; **T.M.C.** pour M évalué en $H \;\rightarrow\; R_2 = 0$ et $R_3 = mg$ — $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}_T}}(M) = m\omega x_e^2(-\sin\alpha\cos\alpha\,\vec{e}_1 + \sin^2\alpha\,\vec{e}_3)$, avec $\vec{e}_1 = \overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_z}$; **T.M.C.** pour M évalué en $O \;\rightarrow\; R_1 = -\dfrac{mg}{\tan\alpha}$

Ex-M6.5 **Oscillateurs à deux ressorts**

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur l rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité supérieure O. À l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. Par ailleurs, ce point M est relié à deux ressorts identiques (k, l_0) eux-mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est verticale.
On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.

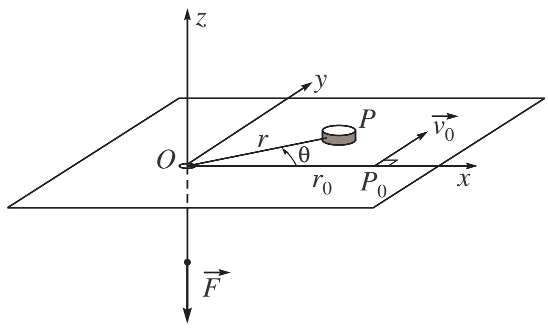


→ En appliquant le théorème du moment cinétique en O, montrer que le mouvement est harmonique et que la périodes des petites oscillations s'écrit : $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2k}{m}}}}$

■ Forces centrales conservatives

Ex-M7.1 **Point matériel tiré par une corde**

Un palet P de masse M glisse sans frottement sur un plateau horizontal (Oxy) percé d'un trou à l'origine O.
Sa position est repérée par les coordonnées polaires r et θ, d'axe (Oz).
L'expérimentateur lance le palet, à la distance r_0 du point O, avec une vitesse initiale orthoradiale $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{e}_{\theta(t=0)}$ (on prendra $\theta(t=0) = 0$), et tire sur le fil de façon à rapprocher régulièrement le palet du point O : $r(t) = r_0 - Vt$.



On admet que la force exercée par le fil (qui reste toujours tendu) sur P est $\vec{T} = -F\overrightarrow{e_r}$.

1) Montrer que la vitesse angulaire du palet s'écrit $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{r_0 v_0}{(r_0 - Vt)^2}$. En déduire l'évolution de la force $\vec{F}$ qu'il faut exercer pour réaliser cet objectif. Commenter.

2) Calculer directement le travail de traction fourni par cet opérateur s'il fait passer la distance du mobile à l'axe de la valeur r_0 à la valeur r_1. Retrouver ce résultat par une méthode énergétique.

Rép : 1) $F = \dfrac{Mr_0^2v_0^2}{(r_0 - Vt)^3}$; dont $\vec{T} = -\dfrac{MC^2}{r^3}\overrightarrow{e_r} = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}r}$ avec $\mathcal{E}_p = -\dfrac{MC^2}{2r^2} + \cancel{Cte}$ (avec $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$ et $C = r_0v_0$ la constante des aires) ; **2)** $W_{0\rightarrow 1}(\vec{F}) = \dfrac{Mr_0^2v_0^2}{2}\left(\dfrac{1}{r_1^2} - \dfrac{1}{r_0^2}\right)$

Ex-M7.2 **Force centrale en** $1/r^3$

Un point matériel M de masse m est soumis, dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, à une force d'expression $\vec{F} = -\dfrac{a}{r^3}\overrightarrow{e_r}$ en coordonnées sphériques de centre O, a étant une constante positive. À l'instant initial, M est à la position M_0 telle que $\overrightarrow{OM_0} = r_0\,\overrightarrow{e_x}$, avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0(\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y})$.

1) Montrer que le mouvement est plan et déterminer le plan de la trajectoire.

M7

2) Montrer que la force $\overrightarrow{F}$ est une force conservative. En déduire l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(r)$ dont elle dérive (on prendre $\mathcal{E}_p(\infty) = 0$)). Déterminer l'expression de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ compte tenu des conditions initiales.

3) r_0 étant donné, indiquer la condition sur v_0 pour que le système soit dans un état de diffusion.

4) La particule est dans un état de diffusion et $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

a) Établir que $\dot{r} = \dfrac{r_0 v_0}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$. En déduire que $\boxed{\dot{r} = -r_0 v_0 u'_\theta}$ avec $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$ et $u'_\theta = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.

b) Exprimer la conservation de l'énergie mécanique en fonction de la variable u et de u'_θ.

En déduire que u vérifie l'équation : $\boxed{u''_\theta + \eta^2 u = 0}$ avec $\boxed{\eta = \sqrt{1 - \dfrac{a}{m r_0^2 v_0^2}}}$.

c) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire compte tenu des conditions initiales.

d) Donner l'allure de la trajectoire pour $\eta = 0,1$, $\theta_0 = 0$ et $r_0 = 1\ m$.

Solution Ex-M7.2

1) La force est centrale de centre de force O. Le **T.M.C.** pour M évalué en O dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit : $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_\mathcal{R} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \mathsf{Cte}$, d'expression :

$$\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \left\{ \begin{array}{lll} \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M_0) & = r_0\,\overrightarrow{e_x} \times m v_0 (\cos\alpha\,\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\,\overrightarrow{e_y}) & = m r_0 v_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} & = r\overrightarrow{e_r} \times (\dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}) & = m r^2 \dot{\theta}\, vez = mC\,\overrightarrow{e_z} \end{array} \right.$$

avec $\boxed{C = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \sin\alpha}$, la **constante des aires**.

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à tout instant à $\overrightarrow{L_O}$, donc à $\overrightarrow{e_z}$, direction fixe de l'espace : **la trajectoire est donc plane**, contenue dans le plan $(Oxy) \perp \overrightarrow{e_z}$.

2) Lors d'un déplacement élémentaire de M, le travail de la force $\overrightarrow{F}$ est : $\delta W = -\dfrac{a}{r^3}\, ver.(\mathrm{d}\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}) = -\dfrac{a}{r^3}\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, avec $\mathcal{E}_p = -\dfrac{a}{2r^2}$ (en choisissant l'énergie potentielle nulle à l'infini).

Thm$\mathcal{E}_m$: $\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0$, soit $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte}}$: **le système est conservatif**.

Le système $\{M, m\}$ a pour énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2 + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \underbrace{\frac{1}{2} m\dot{r}^2}_{\mathcal{E}_{k,r}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{mC^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)}$$

D'où $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \dfrac{1}{2}\dfrac{mC^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \dfrac{m r_0^2 v_0^2 \sin^2\alpha - a}{2r^2}}$

3) L'énergie potentielle s'annule à l'infini. Le système est donc dans un **état de diffusion** si son énergie mécanique est positive, ce qui se traduit par :

$$\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte} = \mathcal{E}_m(0) = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{a}{2r_0^2} > 0 \ \Leftrightarrow\ \boxed{v_0 > \sqrt{\frac{a}{m r_0^2}}}$$

4.a) Comme la constante des aires s'écrit : $C = \dfrac{L_O}{m} = r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \sin\alpha = r_0 v_0$ pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{on a : } \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dfrac{r_0 v_0}{r^2}\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) \\ \text{Comme } u'_\theta = \dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}, \text{on a : } \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -r^2 u'_\theta \end{array}\right\} \text{ Soit : } \boxed{\dot{r} = -r_0 v_0 u'_\theta}$$

Alors $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{k,r} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \dfrac{1}{2} m\dot{r}^2 + \dfrac{m r_0^2 v_0^2 - a}{2r^2} = \dfrac{1}{2} m r_0^2 v_0^2 (u'_\theta)^2 + \dfrac{m r_0^2 v_0^2}{2} u^2$

4.b) Puisque $\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte} \xrightarrow[\text{par rapport à } \theta]{\text{en dérivant}} 0 = m r_0^2 v_0^2 u''_\theta . u'_\theta + (m r_0^2 v_0^2 - a) u . u'_\theta$

Comme le cas $u'_\theta = 0$ ne nous intéresse pas (on étudie le mouvement de M), on obtient :

$$u''_\theta + \left(1 - \frac{a}{mr_0^2 v_0^2}\right) u = 0 \;\Leftrightarrow\; u''_\theta + \eta^2 u = 0 \quad \text{avec } \eta = \sqrt{1 - \frac{a}{mr_0^2 v_0^2}}$$

Rq : η est bien défini puisque $1 - \dfrac{a}{mr_0^2 v_0^2} > 0$ d'après la condition sur la vitesse établie en **3)**.

4.c) La solution générale de l'équation est : $u(\theta) = A\cos(\eta\theta) + B\sin(\eta\theta)$

À $t = 0$, $\theta_0 = 0$ (puisque $\overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{0}$), donc $\overrightarrow{e_r}(0) = \overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_\theta}(0) = \overrightarrow{e_y}$

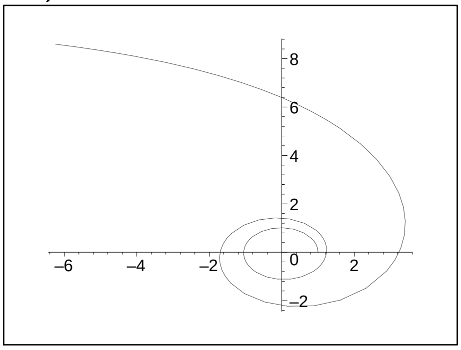
Soit $\overrightarrow{v_0} = \begin{cases} v_0\,\overrightarrow{e_y} \\ \dot r(0)\overrightarrow{e_r} + r_0\dot\theta(0)\overrightarrow{e_\theta} = \dot r(0)\overrightarrow{e_x} + r_0\dot\theta(0)\overrightarrow{e_y} \end{cases}$

Donc : $\dot r(0) = 0 = -r_0 v_0 u'(\theta_0)$ (d'après **4.a)**).

D'où $\begin{cases} u(0) = \dfrac{1}{r_0} & = A \\ u'_\theta(0) = 0 & = -B\eta \end{cases}$

Cl : $u(\theta) = \dfrac{1}{r_0}\cos(\eta\theta) \;\Leftrightarrow\; \boxed{r = \dfrac{r_0}{\cos\left(\theta\sqrt{1 - \dfrac{a}{mr_0^2 v_0^2}}\right)}}$

4.d)



■ Forces centrales newtoniennes

Ex-M7.3 **Méthode du vecteur excentricité** [**d'après école de l'air 1987**]

M7

On se propose d'étudier le mouvement d'un satellite autour de la Terre. La seule force est l'attraction newtonienne de la Terre $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\mu m}{r^2}\overrightarrow{e_r}$. Le satellite M de masse m est repéré par ses coordonnées polaires r et θ.

1) Établir la relation différentielle liant la vitesse $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$. Cette relation s'intègre sous la forme $\overrightarrow{v} = \alpha\,(\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e})$ où $\overrightarrow{e}$ est un vecteur constant appelé vecteur excentricité et α une constante à déterminer en fonction de μ et C (où C est la constante des aires).

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{e_\theta}$. En déduire l'équation polaire de la trajectoire sous la forme :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}} \qquad \text{où} \qquad e = ||\overrightarrow{e}|| \qquad \text{et} \qquad \theta_0 = (\overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e}).$$

Exprimer p en fonction de μ et C.

3) Montrer que l'on peut exprimer l'énergie totale $\mathcal{E}$ sous la forme : $\mathcal{E} = k\,(e^2 - 1)$. Exprimer k en fonction de μ, C et m.

Rép : 1) $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu}{C}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} \;\rightarrow\; \overrightarrow{v} = \dfrac{\mu}{C}(\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{e})$; **2)** $k = \dfrac{\mu^2 m}{2C^2}$

Ex-M7.4 **Vecteur de Runge-Lentz (*)**

On considère une particule ponctuelle M de masse m dont la position est repérée par ses coordonnées cylindriques $(r,\,\theta,\,z)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen de repère $(Oxyz)$. Sa vitesse dans $\mathcal{R}$ est notée $\overrightarrow{v}$. La particule est plongée dans un champ de force dérivant du « potentiel » $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ (avec $\alpha > 0$; il s'agit d'une autre manière de parler de l'énergie potentielle : $\mathcal{E}_p = V(r)$).

1) Montrer que $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}(M) = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{v}$, moment cinétique de M par rapport à O dans R, est un vecteur constant. Exprimer $L_z = L_{O/\mathcal{R}}$ en fonction de m , r et $\dot\theta$. Cette relation est une intégrale première du mouvement.

2) Montrer que l'énergie $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + V(r)$ est une intégrale première du mouvement. Exprimer $\mathcal{E}$ en fonction de r, $\dot r$, $\dot\theta$, m et α.

3) a) Montrer que le vecteur $\boxed{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}} - \alpha\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}}$ est une intégrale première.

Comment sont disposés l'un par rapport à l'autre les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}}}$? Quelles sont les coordonnées polaires A_r et A_θ de $\overrightarrow{A}$ dans le repère mobile $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$?
Nous prendrons $\overrightarrow{e_x}$ suivant $\overrightarrow{A}$ (soit $A_x = A$). Montrer que dans ces conditions r, $\dot{\theta}$ et $\dot{r}$ peuvent être exprimés comme des fonctions de la seule variable θ et des paramètres L_z, A, m et α. Donner ces expressions.

b) Mettre l'expression de r sous la forme : $\frac{p}{r} = 1 + e\cos\theta$

À quelle courbe correspond cette fonction ? Exprimer p et e en fonction des paramètres L_z, A, m et α.

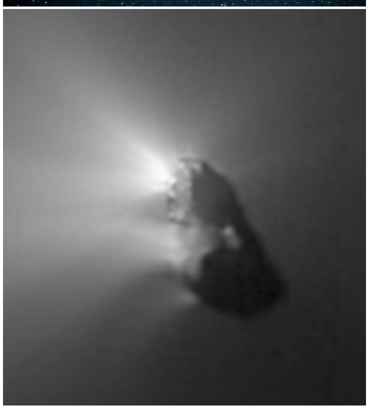
c) Calculer $\mathcal{E}$ et $a = \dfrac{p}{1-e^2}$ en fonction des paramètres L_z, A, m et α.
Quelle valeur maximale A_{max} peut prendre A pour que le mouvement reste de dimension finie ? Pour une valeur de A inférieure à A_{max} tracer l'allure de la courbe en indiquant la position du vecteur $\overrightarrow{A}$.

Rép : 1) $L_z = mr^2\dot{\theta}$; **2)** $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \dot{r}^2\dot{\theta}^2) - \frac{\alpha}{r} = \text{Cte}$; **3.a)** $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{L_O}$; $A_r = mr^3\dot{\theta}^2 - \alpha$ et $A_\theta = -mr^2\dot{r}\dot{\theta}$; en tenant compte de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta} = \dfrac{L_z}{m}$, si on impose $\overrightarrow{A} = A\overrightarrow{e_x}$ (soit $\overrightarrow{A} = A\cos\theta\overrightarrow{e_r} - A\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}$), on a : $r = \dfrac{L_z^2}{\alpha m}\dfrac{1}{1 + \dfrac{A}{\alpha}\cos\theta}$; $\dot{\theta} = \dfrac{L_z}{mr^2} = \dfrac{m}{L_z^3}(A\cos\theta + \alpha)^2$; $\dot{r} = \dfrac{A\sin\theta}{L_z}$; **3.b)** $p = \dfrac{L_z^2}{\alpha m}$ et $e = \dfrac{A}{\alpha}$; **3.c)** $\mathcal{E} = \dfrac{m}{2L_z^2}(A^2 - \alpha^2)$ et $a = \dfrac{\alpha L_z}{m(\alpha^2 - A^2)}$.

Ex-M7.5 La comète de Halley

La comète de Halley décrit une ellipse dont un des foyers est le centre du Soleil que l'on suppose immobile (on travaille dans le référentiel héliocentrique).
L'aphélie A (point le plus éloigné du Soleil) se trouve à une distance $r_A = 5,30.10^9\,km$ et la vitesse de la comète vaut alors $v_A = 0,9\,km.s^{-1}$.
On donne la constante de gravitation universelle :
$\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\,uSI$; et la masse du Soleil : $M_S = 2.10^{30}\,kg$.

1) On cherche à calculer les caractéristiques r_P et v_P de la trajectoire au périhélie P (point le plus proche du Soleil).
a) Trouver deux relations liant r_A, v_A, r_P et v_P.
b) En déduire les valeurs numériques de r_P et v_P.
2) Calculer la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse parcourue par la comète de Halley.
3) À l'aide de la troisième loi de Kepler, et sachant que l'orbite de la Terre est assimilable à un cercle de rayon $r_T = 150.10^6\,km$, calculer la période T_c de la comète de Halley.



Noyau de la comète de Halley photographié par la sonde Giotto. Celle-ci se trouvait alors à seulement 600 km de la comète (14 mars 1986).

Rép : 1.a) $v_A r_A = v_P r_P$ ① et $\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_A} = \frac{1}{2}v_P^2 - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_P}$ ② ; **1.b)** $v_P = 55\ km.s^{-1}$ et $r_P = 8,7.10^7\ km$; **2)** $a = 2,7.10^9\ km$; **3)** $T_c = T_T\left(\dfrac{a}{r_T}\right)^{3/2} = 76\ ans$.

Ex-M7.6 Satellite artificiel

Un satellite est en rotation circulaire autour de la Terre à une altitude $h = 400\,km$. ce satellite possède un réacteur capable d'augmenter sa vitesse orthoradiale de $1\,km.s^{-1}$ en un temps très court. On donne $g_0 = 9,8\,m.s^{-2}$ et $R_T = 6\,400\,km$.
Rq : au premier ordre, le champ de pesanteur $g-0$ s'assimile à l'intensité du champ gravitationnel $\mathcal{G}(r = R_T)$ de la Terre en sa surface supposée sphérique.

1) Calculer numériquement la vitesse et la période de rotation du satellite.
2) Le réacteur ayant été allumé en un point P, préciser la nouvelle trajectoire du satellite en calculant son périgée, son apogée et sa nouvelle période de rotation.
3) En déduire le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire elliptique.

Rép : **1)** $v = 7,68\ km.s^{-1}$ et $T \simeq 1\,h\,33\,min$; **2)** $r_P = 6\,800\ km$ et $r_A = 12\,000\ km$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{g_0 R_T^2}} \simeq 2\,h\,31\,min$; **3)** $e = 0,277$ et $p = 8\,680\ km$

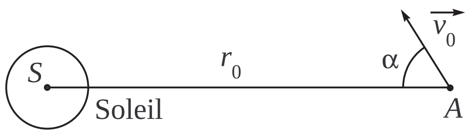
Ex-M7.7 **Expérience de Rutherford - Rayon des noyaux (**)**
Une particule A (de charge $q > 0$) est lancée en direction d'une cible O chargée positivement de masse m_O. À grande distance de O, la particule A, de masse m ($m \ll m_O$), se déplace parallèlement à (Ox), à une distance b de cet axe et avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$. La loi d'interaction entre A et O est une force répulsive dont la norme est du type $F = \dfrac{k}{r^2}$.

1) Montrer que A est déviée d'un angle φ tel que : $\tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = \dfrac{k}{mv_0^2 b}$

On répète l'expérience de RUTHERFORD en envoyant sur une cible fixe dans le référentiel du laboratoire et constitué par une très mince feuille d'or, des hélions d'énergie $\mathcal{E}_0 = 5\ MeV$. On supposera la masse des atomes d'or grande devant la masse des hélions. On observe une déviation des hélions atteignant $150°$ au maximum.
2) Calculer la valeur minimale b_m du paramètre d'impact.
3) Calculer la plus petite distance d'approche d'un hélion et d'un noyau d'or, lorsque le paramètre d'impact a pour valeur b_m. En déduire une borne supérieure de la valeur du rayon du noyau de l'atome d'or.
Donnée : Numéro atomique de l'or $Z = 79$.

Rép : **1)** $k = -K = \dfrac{q.Q}{4\pi\epsilon_0}$, $r = \dfrac{p}{e\cos(\theta-\alpha)-1}$ avec $p = \dfrac{-mC^2}{K} > 0$ et $e > 1$ (hyperbole) ; $C = bv_0$; $\cos\alpha = \dfrac{1}{e}$, $\sin\alpha = \dfrac{p}{be}$, $\varphi = \pi - 2\alpha \quad\rightarrow\quad \tan\dfrac{\varphi}{2} = \text{cotan}\,\alpha = \dfrac{k}{mbv_0^2}$; **2)** $b_m = 6,17.10^{-15}\ m$; **3)** $r_0 = 4,5.10^{-14}\ m$.

Ex-M7.8 **Astéroïde (*)**
Un astéroïde de masse m est repéré dans le système solaire. Dans le repère de COPERNIC ($\simeq$ repère héliocentrique), sa position et sa vitesse au moment de sa découverte sont les suivantes :
$r_0 = 10^8\,km \quad \alpha = 80° \quad v_0 = 51\,km.s^{-1}$



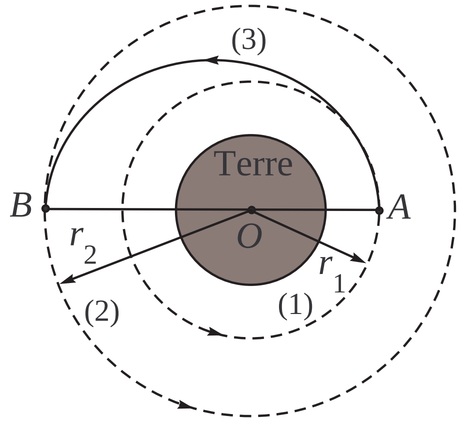
Données : masse du Soleil : $M_S = 2.10^{30}\,kg$; constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\,uSI$.
1) Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de l'astéroïde à une constante près et en déduire la nature de sa trajectoire.
2) Déterminer l'équation polaire $r = f(\theta)$ de sa trajectoire. On prendra $\theta = 0$ pour $r = r_{min}$.
3) Déterminer la valeur de l'angle θ_0 que fait la position initiale avec le grand axe de la conique.
4) Tracer l'allure de la trajectoire de l'astéroïde au voisinage du Soleil sur un schéma.
5) Calculer l'aphélie ($r_{\max}$) et le périhélie ($r_{\min}$) de sa trajectoire. Déterminer la vitesse de l'astéroïde en ces deux points.
6) Calculer la période de rotation T de l'astéroïde autour du Soleil.

Rép : **1)** $\mathcal{E}_m = -m \times 3,35.10^7 < 0 \quad\rightarrow\quad$ trajectoire elliptique ; **2)** $r = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $p = \dfrac{C^2}{\mathcal{G}M_S} = 1,89.10^8\ km$ ($C = r_0 v_0 \sin\alpha$) et $e = \sqrt{1+2\dfrac{\mathcal{E}_m}{m}\dfrac{p^2}{C^2}} = 0,951$; **3/4)** $\theta_0 = 20°$; **5)**

$r_A = r_{\text{max}} = 3,86.10^9\ km$ et $r_P = r_{\text{min}} = 9,68.10^7\ km$; $v_A = v_{\text{min}} = \dfrac{C}{r_{\text{max}}} = 1,3\ km.s^{-1}$ et $v_P = v_{\text{max}} = \dfrac{C}{r_{\text{min}}} = 51,9\ km.s^{-1}$; **6)** $a = \dfrac{r_{\text{max}+r_{\text{min}}}}{} = 1,98.10^9\ km \ \rightarrow\ T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}M_S}} = 48\ ans$

Ex-M7.9 Transfert d'orbite (*, ➜ à voir absolument)

On veut transférer un satellite S de masse m initialement sur une orbite circulaire basse de rayon $r_1 = 6\,400 + 500\,km$ (autour de la Terre de masse M_T) à une orbite circulaire haute de rayon $r_2 = 6\,400 + 36\,000\,km$. Pour cela, on utilise une ellipse de transfert (de A à B) dite ellipse de HOHMANN dont la Terre est un foyer.



Données : masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}\,kg$; constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\,N.m^2.kg^{-1}$.

1) Exprimer et calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite basse.

2) Exprimer l'énergie mécanique du satellite $\mathcal{E}_{m1}$ sur sa trajectoire basse.

3) Exprimer l'énergie mécanique du satellite $\mathcal{E}_{m3}$ sur l'ellipse de transfert.

4) Que faire pour que le satellite au point A passe de sa trajectoire circulaire initiale à l'ellipse de HOHMANN ?
Exprimer et calculer l'écart de vitesse $\Delta v_A = v_{A,(3)} - v_{A,(1)}$ nécessaire.

5) Quelle action faut-il avoir sur le satellite en B pour qu'il passe sur l'orbite circulaire haute ?
Exprimer et calculer l'écart de vitesse $\Delta v_B = v_{B,(2)} - v_{B,(3)}$ nécessaire.

6) Exprimer et calculer la durée du transfert (entre A et B).

Rép : 1) $v_1 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_1}} = 7\,600\ m.s^{-1}$; **2)** $\mathcal{E}_{m1} = -\mathcal{E}_{k1} = \dfrac{\mathcal{E}_{p1}}{2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_1} < 0$;
3) $\mathcal{E}_{m3} = -\dfrac{\mathcal{G}M_T m}{r_1 + r_2} < 0$; **4)** $\Delta v_A = v_1\left(\sqrt{\dfrac{2r_2}{r_1+r_2}} - 1\right) \simeq 2\,370\ m.s^{-1}$;
5) En posant $v_2 = v_{B,(2)} = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r_2}}$: $\Delta v_B = v_2\left(1 - \sqrt{\dfrac{2r_1}{r_1+r_2}}\right) \simeq 1\,440\ m.s^{-1}$;
6) $\Delta t_{A\rightarrow B} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2\mathcal{G}M_T}}(r_1+r_2)^{3/2} \simeq 5\,h\,21\,min$

Ex-M7.10 Distance minimale de passage d'un astéroïde

Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = Ox_0y_0z_0$ est supposé galiléen, et on néglige les effets gravitationnels du Soleil.

Un astéroïde de masse m et de taille négligeable par rapport à la masse M_T de la Terre est repéré en M_0, à une distance très grande de la Terre où on supposera que son influence gravitationnelle est négligeable. On mesure son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{e_{x_0}}$, porté par la droite (M_0x_0) telle que la distance du centre de la Terre à (M_0x_0) est b (b est le « paramètre d'impact »).

1) Montrer que $\mathcal{E}_m(M)$ et $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}_0}}(M)$ se conservent. Exprimer les deux constantes du mouvement en fonction des données initiales.

2) Exprimer l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ en fonction de m, M_T, et L_O.

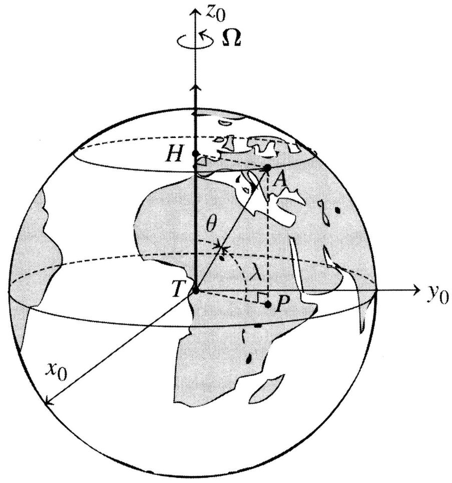
3) Déterminer la distance minimale r_min à laquelle l'astéroïde passe du centre de la Terre et donner la condition de non collision. On utilisera très utilement le potentiel effectif.

Rép : 1) $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_0^2$; $\overrightarrow{L_{O/\mathcal{R}_0}}(M) = \overrightarrow{OM_0} \times m\overrightarrow{v_0} = mbv_0\overrightarrow{e_{z0}}$;
2) $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \mathcal{E}_m - \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = \dfrac{L_O^2}{2mr^2} - \mathcal{G}\dfrac{m.M_T}{r}$; **3)** $r_{\text{min}} = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{v_0^2}\left(\sqrt{1 + \dfrac{b^2v_0^4}{\mathcal{G}^2M_T^2}} - 1\right)$

■ Forces centrales newtoniennes : cas particulier de la trajectoire circulaire

Ex-M7.11 **Vitesse d'un lanceur selon la latitude** (➜ Cf Cours §**VI.1**)

Les lanceurs (ou fusées) sont tirés dans l'espace depuis des bases situées à des latitudes λ variées : Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5°$), Pletsek en Russie ($\lambda_2 = 63°$), Baïkonour dans le Kazakhstan ($\lambda_3 = 46,3°$), Tanegashima au Japon ($\lambda_4 = 30,5°$) et Kourou en Guyane Française ($\lambda_5 = 5,2°$).
La fusée étant fixée au sol, calculer la norme v de sa vitesse, par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_0 = Tx_0y_0z_0$ due à la rotation uniforme de la Terre, de vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} = \omega_T \overrightarrow{e}_{S\to N}$ et de vitesse angulaire $\omega_T = 7,29.10^{-5}\ rad.s^{-1}$ autour de son axe sud-nord. Commenter.



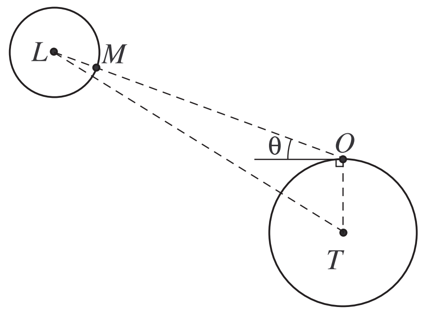
Rép : $v_1 = 410\ m.s^{-1}$; $v_2 = 212\ m.s^{-1}$; $v_3 = 323\ m.s^{-1}$; $v_4 = 402\ m.s^{-1}$; $v_5 = 465\ m.s^{-1}$.

Ex-M7.12 **Orbite de la Terre autour du Soleil** Le centre T de la Terre est en mouvement approximativement circulaire uniforme autour du centre S du Soleil, à une distance $TS = 1\ u.a. = 149,6.10^6\ km$.
Calculer la période de révolution de la Terre et la vitesse de parcours sur son orbite.

Rép : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{TS^3}{\mathcal{G}M_S}} = 365,24\ j$; $v = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_S}{TS}} = 29,8\ km.s^{-1}$.

Ex-M7.13 **Détermination de la masse de la Terre**

On connaît actuellement la distance Terre-Lune, au centimètre près (**!**), à l'aide de miroirs M, installés sur la Lune par les astronautes des missions Apollo. Un laser pointé sur la Lune tire une salve lumineuse dont on mesure la durée τ de propagation aller-retour depuis l'observatoire O où se déroule l'expérience. Lorsque l'angle θ de la hauteur angulaire de la Lune au dessus de l'horizon vaut 45°, on trouve $\tau = 2,516\ s$.



1) Calculer la distance OM. En déduire la distance TL sachant que $R_T = 6\,400\ km$ et $R_L = 1\,700\ km$.

2) Quelle est l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{G}_T(L) = \dfrac{\overrightarrow{F_{\text{grav}}}(L)}{M_L}$ produit par la Terre en L ?

3) La période de révolution *sidérale* de la Lune, c'est-à-dire la période du mouvement orbital lunaire mesurée dans un référentiel géocentrique, dont les axes sont dirigés vers des étoiles lointaines, vaut $T_L = 27\,j\ 8\,h$.
Trouver l'accélération de la Lune, en supposant que le centre de la Lune décrit une trajectoire circulaire dont le centre est occupé par la Terre. En déduire la masse de la Terre.

Solution Ex-M7.13

1) La vitesse de propagation de la lumière dans le vide est $c \simeq 3.10^8\ m.s^{-1}$. D'où : $OM = \dfrac{c.\tau}{2} = 377\,400\ km$.
La relation entre les côtés du triangle TOL donne : $TL^2 = OL^2 + R_T^2 - 2OL.R_T.\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)$.
D'où, puisque $OL = OM + R_L$: $TL = \sqrt{(OM + R_L)^2 + R_T^2 + 2(OM + R_L).R_T.\sin\theta}$.
Finalement : $TL = \sqrt{(377,4 + 1,7)^2 + 6,4^2 + (377,4 + 1,7).6,4.\sqrt{2}} = 383\,600\ km$

2) Le champ de gravitation de la Terre en L a pour expression : $\overrightarrow{G}_T(L) = -\mathcal{G}\dfrac{M_T}{TL^2}\,\overrightarrow{e_r}$, avec $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_{T\to L}} = \dfrac{\overrightarrow{TL}}{TL}$.

3) La Lune étant soumise à la seule force gravitationnelle de la Terre, son accélération dans le référentiel géocentrique est purement radiale. Si sa trajectoire est circulaire, elle est uniforme (➜ Cf Cours **M7.VI**). Sa vitesse est donc $\overrightarrow{v_{L/\mathcal{R}_0}} = TL\omega_L\,\overrightarrow{e_\theta}$ avec ($\omega_L = \dfrac{2\pi}{T_L} = 0,266.10^{-5}\ rad.s^{-1}$) et son accélération vaut donc : $\overrightarrow{a_{L/\mathcal{R}_0}} = -\dfrac{v^2}{TL}\,\overrightarrow{e_r} = -TL\omega_L^2\,\overrightarrow{e_r}$.

Le **P.F.D.** appliqué à la Lune dans le référentiel géocentrique donne :

$$M_L\overrightarrow{a_{L/\mathcal{R}_0}} = \overrightarrow{F_{\mathsf{grav}}}(L) \ \Leftrightarrow\ a_r(L) = G_T(L) \ \Leftrightarrow\ TL\omega_L^2 = \mathcal{G}\frac{M_T}{TL^2}$$

Soit : $M_T = \dfrac{TL^3\omega_L^2}{\mathcal{G}} = \dfrac{(383,6.10^6)^3\times(0,266.10^{-5})^2}{6,67.10^{-11}} = 6,0.10^{24}\ kg$

Rq : On arrivait plus rapidement au résultat en appliquant la 3e loi de Képler : $\dfrac{T_L^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$ avec $a = TL$.

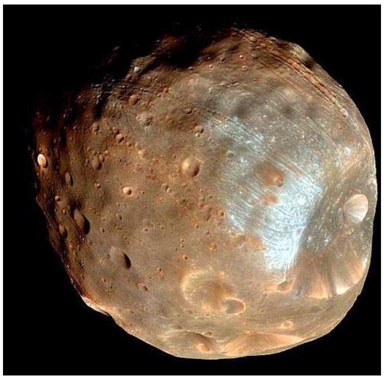
Ex-M7.14 satellite Phobos et Déimos de Mars

La planète Mars (masse $M_M = 6,24.10^{24}\ kg$) possède deux satellites naturels, Phobos et Déimos, considérés comme des astéroïdes en raison de leur petite taille et de leur forme irrégulière. La distance moyenne du centre de ces satellites au centre de Mars est $r_P \simeq 9\,379\ km$ pour Phobos et $r_D \simeq 23\,459\ km$ pour Déimos.

1) Calculer les vitesses de satellisation v_P et v_D de Phobos et Déimos.

2) En déduire leurs périodes de révolution respectives T_P et T_D, en jours, heures, minutes, secondes.

3) Vérifier que le rapport $\dfrac{T^2}{r^3}$ est indépendant du satellite. Quelle est l'expression littérale de ce rapport en fonction de M_M ?



Phobos

Rép : **1)** $v_P = 6,67\ km.s^{-1}$; $v_D = 4,21\ km.s^{-1}$; **2)** $T_P = 8\,835\ s = 2\,h\ 27\,min\ 15\,s$; $T_D = 35\,010\ s = 9\,h\ 43\,min\ 31\,s$; **3)** $\dfrac{T_P^2}{r_P^3} = 9,46.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$; $\dfrac{T_D^2}{r_D^3} = 9,49.10^{-14}\ s^2.m^{-3}$; 3e loi de Képler : $\dfrac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_M}$ avec $a = r$ pour une trajectoire circulaire.

Ex-M7.15 Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération (ou vitesse d'« évasion ») à la surface des astres suivants, dont les masses et les rayons respectifs sont :

1) pour la Lune : $M_L = 7,4.10^{22}\ kg$ et $R_L = 1\,700\ km$,

2) pour Mars : $M_{Ma} = 6,4.10^{23}\ kg$ et $R_{Ma} = 3\,400\ km$,

3) pour Mercure : $M_{Me} = 3,3.10^{23}\ kg$ et $R_{Me} = 2\,440\ km$.

Rép : La vitesse de libération est caractérisée par une énergie mécanique (trajectoire parabolique) nulle du point matériel de masse m étudié (dans le référentiel « astrocentrique ») à la surface de l'astre de rayon R et de masse M : $\mathcal{E}_m = \dfrac{1}{2}mv_l^2 - \mathcal{G}\dfrac{m.M}{R} = 0$, soit : $v_l = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{G}M}{R}}$.

$v_{l,L} = 2,4\ km.s^{-1}$; $v_{l,Ma} = 5\ km.s^{-1}$; $v_{l,Me} = 4,2\ km.s^{-1}$.

"Cependant la nuit marche, et sur l'abîme immense
Tous ces mondes flottants gravitent en silence,
Et nous-même, avec eux emportés dans leurs cours,
Vers un port inconnu nous avançons toujours."
Lamartine – Les Étoiles