

## ■ Changement de référentiels : aspect cinématique

### Ex-M8.1 Accélération en coordonnées cylindriques

- 1) Quelle est la vitesse d'un point exprimée dans la base locale des coordonnées sphériques ?
- 2) Quel est le vecteur rotation du repère  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  par rapport au repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  ?  
En déduire une autre méthode de calcul de la vitesse précédente en utilisant les changements de référentiels.

Rép : → Cf Cours M8.II.2.c), p. 4.

### Ex-M8.2 Traversée d'une rivière

Un nageur dont la vitesse par rapport à l'eau est  $v_1$  traverse une rivière de largeur  $l$  en suivant une trajectoire perpendiculaire aux berges. Sachant que le courant a une vitesse  $v_0$  uniforme, calculer le temps de la traversée.

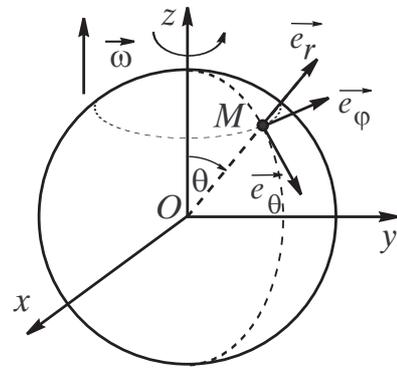
Rép : Avant tout calcul, un schéma et la bonne compréhension des référentiels mis en jeu sont ici obligatoires.  $\tau = \frac{l}{\sqrt{v_1^2 - v_0^2}}$

### Ex-M8.3 Déplacement selon un méridien

Une sphère de rayon  $R$  tourne sur elle-même à vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$  constante dans  $\mathcal{R}(Oxyz)$ .

Un point  $M$ , initialement au sommet, se déplace à sa surface selon un méridien (du « Nord » vers le « Sud »), à vitesse constante  $v_0$  par rapport à elle.

Déterminer, en coordonnées sphériques, la vitesse et l'accélération de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ , en fonction du temps.



Rép : Définir le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la sphère et appliquer, entre  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ , la **L.C.V.** ( $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}'}} + \vec{v}_e(M)$ ) et la **L.C.A.** ( $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}'}} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_C(M)$ ) :

$$\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}}} = v_0 \vec{e}_\theta + \omega R \sin \theta \vec{e}_\varphi; \quad \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}}} = \left( -\frac{v_0^2}{R} - \omega^2 R \sin^2 \theta \right) \vec{e}_r - \omega^2 R \sin \theta \cos \theta \vec{e}_\theta + 2\omega v_0 \cos \theta \vec{e}_\varphi$$

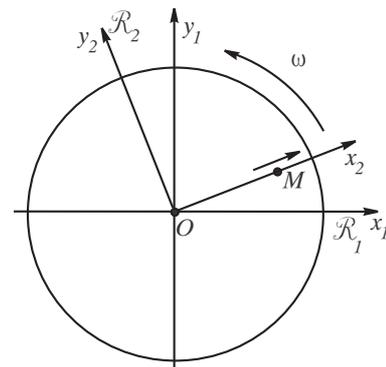
### Ex-M8.4 Mouvement radial sur un plateau tournant

Soit le plateau horizontal d'un four micro-onde avec une vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe vertical fixe.  $\mathcal{R}_1$  est le référentiel terrestre et  $\mathcal{R}_2$  est lié au plateau.

Supposons qu'une fourmi  $M$ , égarée (...), survive suffisamment pour décrire à vitesse constante  $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_2}}$  l'axe  $(Ox_2)$  lié à  $\mathcal{R}_2$ .

→ Exprimer  $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}}$  et  $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}}$  dans la base  $(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2})$ .

Rép :  $\overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_1}} = v \vec{e}_{x_2} + x_2 \omega \vec{e}_{y_2}$ ;  $\overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_1}} = -x_2 \omega^2 \vec{e}_{x_2} + (2\omega v + x_2 \dot{\omega}) \vec{e}_{y_2}$



"Toi donc qui aspires à de si grands biens  
souviens-toi qu'il ne faut pas médiocrement te démener pour les atteindre,  
mais qu'il faut absolument en répudier certains, et en ajourner d'autres pour l'instant."  
Épictète – Manuel, I.4

## M9

## ■ Dynamique en référentiel non galiléen

**Ex-M9.1** Anneau coulissant sur un cercle en rotation (\*, → à voir !)

Une circonférence de centre  $O$  et de rayon  $R$  située dans un plan vertical tourne autour d'un de ses diamètres d'un mouvement uniforme défini par sa vitesse angulaire  $\omega$ .

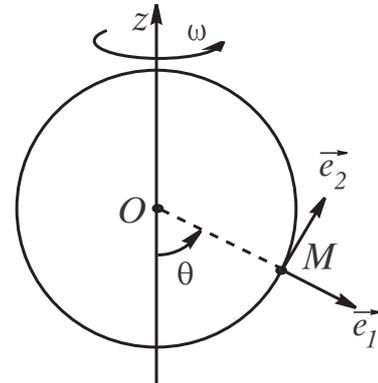
Un anneau  $M$  de masse  $m$  assimilable à un point matériel est mobile sans frottement sur cette circonférence.

On désigne par  $\theta$  l'angle que fait  $OM$  avec la verticale ascendante.

**I -** Trouver l'équation du mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}$  référentiel tournant lié à la circonférence :

- 1) à partir de la relation fondamentale de la dynamique ;
- 2) à partir du théorème du moment cinétique ;
- 3) à partir de la puissance cinétique ;
- 4) à partir de la conservation de l'énergie mécanique (qui sera justifiée).

Vérifier qu'on obtient la même équation du mouvement avec les différentes méthodes.



**II -** On veut étudier l'équilibre relatif de  $M$ .

- 1) Écrire la relation  $f(\theta) = 0$  donnant les positions d'équilibre dans  $\mathcal{R}$ .
- 2) Déterminer les positions d'équilibre.
- 3) Étudier la stabilité des différentes positions.

**III -** On veut que l'équilibre stable corresponde à  $30^\circ$ .

Quelle devra être la vitesse angulaire si  $R = 0,2 \text{ m}$  et  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ ? Calculer la période des petits mouvements autour de cette position.

**IV -** Tracer l'allure du profil d'énergie potentielle (dans  $\mathcal{R}$  référentiel lié à la circonférence).

En déduire la nature du mouvement possible (oscillations ou révolutions) suivant la valeur de l'énergie mécanique du point matériel.

**Rép : I)**  $\ddot{\theta} - \omega^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{g}{R} \sin \theta = 0$

**II.1)** Il s'agit, bien entendu, de la condition d'équilibre pour ce système conservatif :  $\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}\right)_{(\theta_{\text{eq}})} = 0$

$0 \Leftrightarrow \sin \theta (g - \omega^2 R \cos \theta) = 0$  puisque  $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,g} + \mathcal{E}_{p,ie} = -mgR \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2 \theta$ ; **II.2)**

$\theta_{\text{eq1}} = 0, \theta_{\text{eq2}} = \pi$  et deux autres possibilités, dans le seul cas où  $\omega > \sqrt{\frac{g}{R}}$  :  $\theta_{\text{eq3}} = \arccos \frac{g}{R\omega^2}$

et  $\theta_{\text{eq4}} = -\theta_{\text{eq3}}$ ; **II.3)** Déterminer le signe de  $\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}\right)_{(\theta_{\text{eq}})}$ . En déduire le caractère instable ou stable de chaque position d'équilibre.

**III)**  $\omega = \sqrt{\frac{2g}{R\sqrt{3}}} \simeq 7,6 \text{ rad.s}^{-1}$ . Puisqu'on se place dans la situation où  $\theta_{\text{eq}} = \theta_{\text{eq3}}$  est un

équilibre stable, un petit écart  $\varphi$  depuis cette position d'équilibre va être régi par une équation de la forme  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$  avec  $\omega_0 = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi}{T_0}$ , d'où  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2R\sqrt{3}}{g}} \simeq 1,65 \text{ s}$ .

**Ex-M9.2** Une tige horizontale  $AB$  de longueur  $l$  est solidaire d'un axe vertical ( $\Delta$ ) qui tourne avec la vitesse angulaire  $\omega$  constante. Un petit anneau  $M$  de masse  $m$  considéré comme ponctuel peut glisser sans frottements sur la tige  $AB$ . Il est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige (à une date prise comme origine des temps) en I milieu de  $AB$ .

- 1) Étudier le mouvement de  $M$  dans le référentiel du système tournant.
- 2) À quelle date et avec quelle vitesse arrive-t-il à l'extrémité de la tige ?

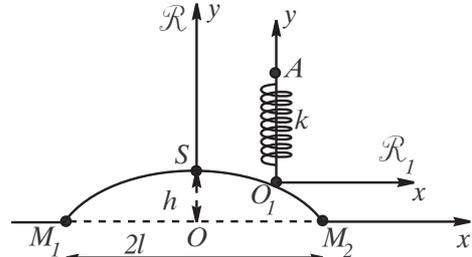
3) Donner l'expression de la réaction de la tige sur l'anneau au point B juste avant la chute.

Rép : 1) en appelant  $(Ox')$  la direction de la tige :  $OM = x' = \frac{l}{2} \operatorname{ch} \omega t$ ; 2)  $t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arcch} 2$ ;  $v_B = \frac{l\omega}{2} \sqrt{3}$ ; 3)  $R_{(M=B)} = m\sqrt{g^2 + 3l^2\omega^4}$ .

**Ex-M9.3** Mouvement d'un point matériel dans un véhicule accéléré (\*)

Un véhicule a un mouvement de translation uniforme de vitesse  $\vec{v}$  sur une route curviligne d'équation cartésienne  $y = f(x)$ .

On lui associe un référentiel  $\mathcal{R}_1 (O_1xyz, t)$  en translation par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}(Oxyz, t)$ . Un point matériel A, de masse  $m$ , lié à l'origine  $O_1$  par un ressort de raideur  $k$ , de longueur naturelle  $l_0$ , évolue le long de l'axe  $(O_1y)$ .



1) Montrer que la composante cartésienne, suivant la verticale ascendante  $(Oy)$ , de l'accélération de  $O_1$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit  $\frac{v^2 f''}{(f'^2 + 1)^2}$ ,  $f'$  et  $f''$  désignant les dérivées première et seconde de  $f$  par rapport à  $x$ .

2) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait le mouvement de A dans  $\mathcal{R}_1$ .

3) Calculer la tension  $\vec{T}$  du ressort dans le cas où, grâce à une force supplémentaire de frottement visqueux, A acquiert rapidement une position d'équilibre dans  $\mathcal{R}_1$ . Comparer alors  $\vec{T}$  au poids, dans les cas où la route forme une bosse ou un creux. Conclure, en utilisant la notion de poids apparent.

4) Le profil de la route forme une bosse assimilable à un arc de parabole,  $M_1SM_2$ , dont les caractéristiques sont données sur la figure ci-jointe. Pour quelle valeur de la vitesse y-a-t-il impesanteur pour A en S ?

Rép : 1)  $v_{O_1/\mathcal{R}_T} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$  avec  $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = f' \dot{x} \rightarrow \dots \rightarrow \ddot{y} = \frac{v^2 f''}{(1 + f'^2)^2}$ ; 2)  $m\vec{a}_{A/\mathcal{R}_1} = \vec{F}_{\text{élas}} + m\vec{g} - m\vec{a}_e(M)$ ; 3)  $T = mg + \frac{mv^2 f''}{(1 + f'^2)^2}$ ; 4)  $v = l\sqrt{\frac{g}{2h}}$ .

**Ex-M9.4** Anneau sur une tige en rotation autour d'un axe fixe

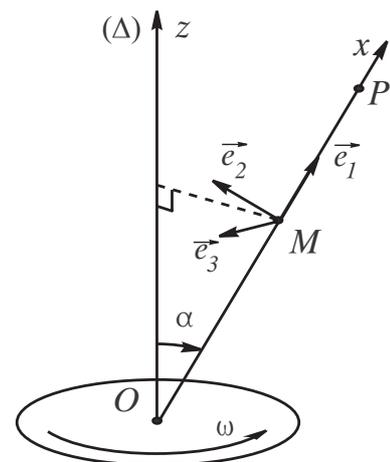
Une tige OP de longueur  $l$  est fixée au point O à un axe vertical  $(\Delta)$  avec lequel elle fait un angle  $\alpha$  constant. Un petit anneau de masse  $m$  considéré comme ponctuel peut se déplacer sans frottement sur la tige OP. Soit M sa position définie par  $OM = x$ .

L'ensemble est en rotation uniforme autour de l'axe  $(\Delta)$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .

1) Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre  $x_e$  de l'anneau sur la tige OP que si la vitesse angulaire de rotation est supérieure à une valeur limite  $\omega_0$  que l'on déterminera.

2) Préciser la position de l'anneau pour une vitesse  $\omega_1 \geq \omega_0$ .

3) Si l'on écarte légèrement l'anneau de cette position lorsqu'elle existe, que se passe-t-il ? Étudier la stabilité de l'équilibre.



Rép : 1)  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{l \sin^2 \alpha}}$ ; 2)  $x_1 = \frac{g \cos \alpha}{\omega_1^2 \sin^2 \alpha}$ ; 3) P.F.D. dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié à la tige en projection selon Ox :  $\ddot{x} - \omega_1^2 \sin \alpha x = -g \cos \alpha$ , de solution  $x(t) = x_P + x_G = x_1 + A \exp(-\lambda t) + B \exp(\lambda t)$  avec  $\lambda = \sqrt{\omega^2 \sin \alpha}$ . Comme  $x(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \nearrow$ , l'équilibre est instable.

**Ex-M9.5 Pendule 'simple'**

Un pendule simple est constitué d'un point matériel  $M$  de masse  $m$ , placé à l'extrémité d'un fil inextensible, de longueur  $l$  (et de masse négligeable). L'autre extrémité du fil est fixée en  $O'$ .

$O'$  oscille sinusoidalement suivant la verticale, avec une amplitude  $D_m$  et une pulsation  $\omega$  :

$$\overrightarrow{OO'} = D_m \cos \omega t \vec{e}_x$$

On désigne par  $\theta$  l'angle que fait le pendule avec la verticale descendante ( $Ox$ ), de vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ . On suppose qu'il n'y a pas de frottements. On note  $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  le repère associé au référentiel terrestre supposé galiléen et  $\mathcal{R}'(O', \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le repère lié au support du pendule.

- 1)  $\mathcal{R}'$  est-il galiléen ?
- 2) Écrire l'expression du théorème du moment cinétique en  $O'$ .
- 3) En déduire que l'équation différentielle du mouvement de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit sous la forme :  

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t)) \sin \theta = 0 \quad \text{où } h(t) \text{ est une fonction du temps à préciser.}$$

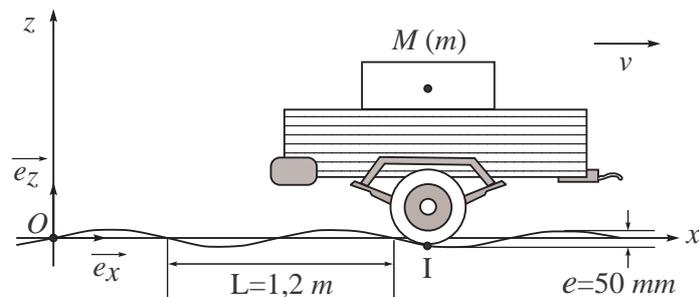
**Rép : 3)**  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \left( 1 + \frac{D_m \omega^2}{g} \cos \omega t \right) \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h(t)) \sin \theta.$

**Ex-M9.6 Une remorque sur une route bosselée**

On suppose le référentiel lié au sol terrestre galiléen. On étudie un objet  $M$  de masse  $m$  posé sur le plateau d'une remorque. La remorque se déplace à une vitesse horizontale  $v = cste$  sur une route de profil sinusoidal.

On suppose les amortisseurs et les pneus de la remorque infiniment rigides.

→ Déterminer la vitesse  $v$  à partir de laquelle l'objet ne reste plus tout le temps en contact avec le plateau de la remorque.

**Méthode et indications pour résoudre ce problème :**

- faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur  $\mathcal{S} = \{M, m\}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_1$  lié à la remorque
- en particulier, montrer que  $\vec{F}_{ie}(M) = -m\ddot{z}_I \vec{e}_z$ , avec  $z_I$ , l'altitude de  $I$ , point géométrique lié à  $\mathcal{R}_1$  qui coïncide avec le point de la remorque en contact avec le sol
- exprimer  $z_I(t)$  en fonction de  $e$ ,  $x$  et  $L$ ; en déduire que  $\ddot{z}_I = -\left(\frac{2\pi v}{L}\right)^2 z_I(t)$
- exprimer le **P.F.D.** pour  $M$  dans  $\mathcal{R}_1$  et en déduire l'expression de la réaction de la remorque sur  $M$  en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $\ddot{z}_I$
- quelle est la condition sur  $R$  qui traduit le contact de  $M$  avec la remorque ?
- en déduire qu'il y a décollerment dès que  $\ddot{z}_{I,\min} < -g$ ; en déduire  $v$ .

**Rép :**  $v = \sqrt{\frac{g}{2e}} \cdot \frac{L}{\pi}$

## ■ Système de deux points matériels

### Ex-M10.1 Étoile double

Dans une étoile double, les deux étoiles composantes ont une orbite relative circulaire, la période de révolution étant  $T_0$ . Dans le référentiel barycentrique, la vitesse de chacune des étoiles a sensiblement même module  $v_0$ .

→ Calculer la distance  $d$  des étoiles ainsi que leurs masses. (Faire un dessin avec les 2 étoiles et la particule réduite).

**Rép :**  $m = \frac{2dv_0^2}{\mathcal{G}}$  ;  $d = \frac{v_0 T_0}{\pi}$ .

### Ex-M10.2

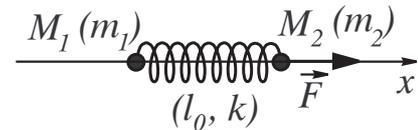
Deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$  sont reliés par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . Ils peuvent se déplacer sans frottements sur un axe horizontal ( $Ox$ ).

Pour  $t < 0$ , le ressort est détendu et les masses sont au repos en  $M_{10}$  et  $M_{20}$ .

À partir de  $t = 0$ , on exerce sur  $M_2$  une force horizontale constante  $\vec{F} = F \vec{e}_x$ .

On note :  $X_1(t) = \overline{M_{10}M_1(t)}$  et  $X_2(t) = \overline{M_{20}M_2(t)}$ .

→ Déterminer  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$ .



### Ex-M10.3 Modélisation d'une collision (\*)

Deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  et un ressort lié à  $M_2$  se déplacent sans frottements sur ( $Ox$ ). Le ressort, modélisant les forces de collision lors d'un choc élastique frontal, a une masse négligeable, une raideur  $k$ , une longueur à vide  $l_0$ .

À  $t < 0$  : le ressort est détendu, son extrémité  $A$  coïncide avec  $O$ ,  $M_1$  est animé d'une vitesse  $\vec{v}_0$ .

Pour  $0 < t < t_1$ , le ressort est comprimé entre les deux masses.

Pour  $t > t_1$ , il n'y a plus d'interaction et le ressort s'est détendu.

1) Déterminer les mouvements de  $M_1$  et  $M_2$  pendant la phase d'interaction ( $0 < t < t_1$ ).

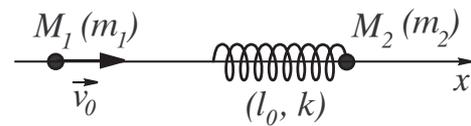
2) Calculer la durée de cette phase d'interaction.

**A.N. :**  $k = 10 \text{ N.m}^{-1}$  ;  $v_0 = 0,9 \text{ m.s}^{-1}$  ;  $m_1 = 50 \text{ g}$  ;  $m_2 = 10 \text{ g}$ .

3) Quelle est la distance minimale entre  $M_1$  et  $M_2$  lors de l'interaction ?

4) Quelles sont les vitesses de  $M_1$  et  $M_2$  après l'interaction (pour  $t > t_1$ ) ?

Commenter le cas particulier  $m_1 = m_2$ .



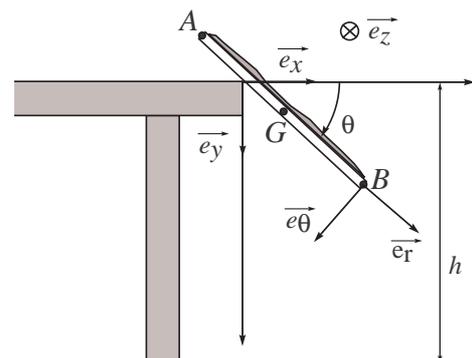
### Ex-M10.4 Pourquoi la tartine tombe toujours du mauvais côté... (\*\*)

On modélise une tartine par un système ( $\mathcal{S}$ ) constitué d'une tige sans masse de longueur  $2a$  reliant deux points matériels  $A$  et  $B$  de masse  $m$ .

On étudie la chute de cette tartine depuis le bord d'une table (de hauteur  $h \gg a$ ).

À  $t = 0$ , le centre d'inertie  $G$  de la tartine a comme coordonnées  $(d, 0, 0)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  lié au référentiel  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen et sa vitesse est nulle.

Dans un premier temps, la tartine se met à basculer autour de l'arête  $(O, \vec{e}_z)$  de la table sans glisser. Dès qu'elle est à la verticale, elle quitte le contact de la table et amorce, dans un second temps, une chute libre.



**Données :**  $a = 2,5 \text{ cm}$ ,  $d = 0,02 a$  et  $h = 75 \text{ cm}$ .

- 1) Exprimer, dans la base polaire du schéma, les vecteurs  $\overrightarrow{GB}$  et  $\overrightarrow{GA}$ . En déduire les vitesses de  $B$  et  $A$  dans le référentiel barycentrique de la tartine.
- 2) Déterminer l'énergie cinétique de la tartine dans  $\mathcal{R}_g$  lors de la première phase du mouvement. (Penser à utiliser le second théorème de KœNIG).
- 3) Déterminer l'énergie potentielle de la tartine lors de la première phase du mouvement (On prendra  $\mathcal{E}_p = 0$  en  $\theta = 0$ ).
- 4) On suppose que pendant la première phase du mouvement, la tartine est un système conservatif.  
→ Exprimer  $\dot{\theta}$  en fonction de  $g$ ,  $d$ ,  $a$  et  $\theta$ .  
→ En déduire la vitesse de  $G$  lorsque la tartine quitte la table.
- 5) On pose  $\Delta = (G, \vec{e}_z)$ . Appliquer le théorème du moment cinétique barycentrique en projection scalaire selon  $\Delta$ . → Que peut-on en déduire quant à  $L_{\Delta}^*(\mathcal{S})$  ?
- 6) Déterminer, lors de la seconde phase, la loi horaire  $\theta(t)$  (on appellera  $t_1$ , l'instant du début de cette phase).
- 7) Déterminer la durée de la chute. En déduire l'angle dont a tourné la tartine. Conclusion.

### ■ Référentiel terrestre et géocentrique

**M11**

#### Ex-M11.1 Pesanteur apparente dans un navire

Un navire se déplace vers l'ouest, en suivant un parallèle, à la latitude  $\lambda = 40^\circ$ , à la vitesse  $v = 15 \text{ m.s}^{-1}$ .

Quelle est la variation relative du poids d'un corps associé à un tel mouvement, pour un passager du navire, qui utilise l'équilibre local d'un point matériel pour définir le poids d'un corps ?

Rép :  $\frac{g' - g}{g} \simeq \frac{v^2}{r} - 2\Omega_T v \simeq 0,02\%$  (difficilement mesurable)

#### Ex-M11.2 Usure des rails

Un train de masse  $m = 2 \text{ tonnes}$  avance vers le nord, le long d'un méridien, à la vitesse de  $100 \text{ km.h}^{-1}$ , dans une région de latitude  $\lambda = 45^\circ$  de l'hémisphère nord.

→ Exprimer la valeur et la direction de la force latérale exercée sur les rails.

#### Ex-M11.3 Angle entre $\vec{G}_T$ et $\vec{g}$

Déterminer en fonction de la latitude  $\lambda$ , l'angle  $\alpha$  que fait la verticale du lieu avec la direction du champ de gravitation. À quelle latitude la valeur de  $\alpha$  est-elle maximale ?

#### Ex-M11.4 Influence de la force de Coriolis sur une balle de fusil

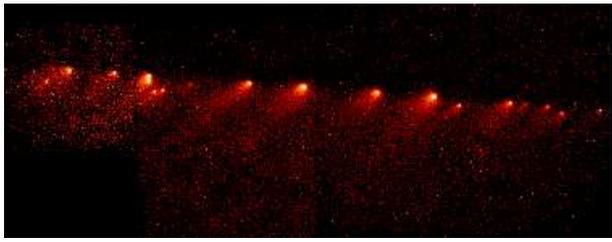
Une balle de fusil est tirée, horizontalement, dans la direction du Nord, depuis un point de la Terre, de latitude  $\lambda = 43^\circ$ . Sa vitesse initiale est de  $1000 \text{ m.s}^{-1}$ .

- 1) Calculer la position de l'impact sur une cible située à  $100 \text{ m}$ , en ne tenant compte que de la force de pesanteur.
- 2) Étudier qualitativement l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement du projectile.
- 3) Donner les équations différentielles du mouvement en négligeant la résistance de l'air mais en tenant compte de la rotation de la Terre.
- 4) Trouver, en  $cm$ , la déviation vers l'Est due à la rotation de la terre autour de l'axe des pôles.

#### Ex-M11.5 À propos de la comète Shoemaker-Levy 9

On supposera que le référentiel Jupiterocentrique est galiléen et on négligera dans tous le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposé sphérique, homogène, de masse  $M_J$ , de rayon  $R_J$  et de masse volumique  $\rho_J$ .

Données :  $R_J = 71400 \text{ km}$  ;  $M_J = 1,91.10^{27} \text{ kg}$  ;  $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ .



La comète SHOEMAKER-LEVY 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter et éclater en morceaux à cause des forces de marées dues à Jupiter.

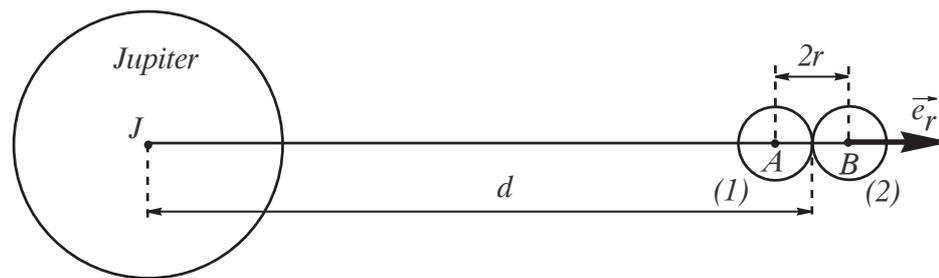
Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994, et cette collision a été suivie en détail et en direct par les astronomes du monde entier. Le but de ce problème est de comprendre, à l'aide de modèles très simples, l'origine de la fragmentation.

On cherche ici à déterminer la distance (limite de ROCHE) en dessous de laquelle un corps s'approchant de Jupiter se séparerait en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marées dues à Jupiter.

Pour cela on fait les hypothèses suivantes :

- La comète de masse volumique  $\rho_C$  est en orbite circulaire de rayon  $d$  autour de Jupiter.
- La comète est constituée de deux sphères identiques de masse  $m$  et de rayon  $r$ , homogènes et disposées comme indiqué sur la figure. Ces deux sphères sont liées entre elles par leur attraction gravitationnelle mutuelle.

On suppose que la disposition des deux sphères reste inchangée, les centres étant toujours alignés avec le centre de Jupiter.



- Lors des calculs d'attraction gravitationnelle sur une sphère de masse  $m$  et de rayon  $r$ , on suppose que toute la masse  $m$  est concentrée au centre de la sphère.

1) Déterminer les forces d'attraction gravitationnelles de Jupiter sur chacune des deux sphères. (On donnera les expressions approchées au premier ordre en  $\frac{r}{d}$ , expressions que l'on utilisera pour la suite du problème).

2) Appliquer le théorème du centre d'inertie à la comète.

→ En déduire que le mouvement du centre d'inertie est uniforme et donner l'expression de sa vitesse angulaire  $\omega$ .

3) Pour chaque sphère, faire un bilan des forces exercées dans le cas d'un contact maintenu (on appellera  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  les forces de contact,  $R$  leur module).

Écrire le théorème de la résultante cinétique pour chaque sphère.

4) Après avoir déterminé les expressions des accélérations des centres d'inertie A et B des deux sphères (en fonction de  $\omega$ ,  $d$  et  $r$ ), projeter les relations précédentes de façon à obtenir un système de deux équations.

5) À quelle condition sur  $R$  le contact est-il rompu ?

En déduire que le contact est rompu lorsque  $d$  devient inférieur à  $d_{lim}$  (on appelle  $d_{lim}$  la limite de ROCHE).

Exprimer  $\frac{d_{lim}}{R_J}$ . Application numérique avec  $\rho_C = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .