

Eléments abordés	Socle
Calculer le PGCD de deux entiers	x
Calcul avec les fractions,	x
Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de 2 entiers	
Puissances	x
Identités remarquables	
Triangle rectangle et théorème de Pythagore	x
C1,C2, C3 ,C4 du livret de compétence	x
D2, D3	x

La calculatrice est autorisée mais tous les calculs doivent être détaillés et les réponses doivent être justifiées. Si le travail n'est pas terminé, laisser tout de même des traces de recherche. Elles seront prise en compte dans la notation.

EXERCICE N°1 : (6 points)

1°) Deux égalités sont données ci-dessous.

$$\text{Égalité 1 : } (a - 5)^2 = a^2 - 25 \qquad \text{Égalité 2 : } \frac{2^8 \times 5^7}{5^2 \times 2^3} = 10^5$$

Si elle est vraie, écrire les étapes des calculs qui permettent de l'obtenir.
Si elle est fausse, la transformer pour qu'elle devienne vraie.

2°) a) **Développer**, réduire, ordonner l'expression suivante : $M = (2x + 11)^2 - (2x - 11)^2$

b) En déduire, sans utiliser de calculatrice, le résultat de $2011^2 - 1989^2$.

Ou

2°) On donne l'expression suivante : $N = (2x + 3)^2$

a) **Développer**, réduire, ordonner l'expression N .

b) Calculer N pour $x = 4$ $x = -5$.

3°) Calculer astucieusement : 105×95 ou $5,6 \times 11,5 - 5,6 \times 1,5$

EXERCICE N°2 : (6 points)

Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 3
- Calculer le carré du résultat obtenu
- Soustraire le carré du nombre de départ
- Soustraire 9

1°) Clément applique le programme au nombre 2. Prouver qu'il trouve 12.

2°) Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre 7 ?

3°) Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre $\frac{1}{5}$?

(indice 1)

4°) Clément prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, on peut trouver le résultat final en une étape. A-t-il raison ? (indice 2)

5°) Trouver le nombre pour lequel le résultat du programme donne (-30).

Ou

Voici un programme de calcul :

On prend un nombre, on ajoute 4, on multiplie le résultat par 3, puis on soustrait 12 .

1°) Clément applique le programme au nombre 1. Prouver qu'il trouve 3.

2°) Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre 5 ?

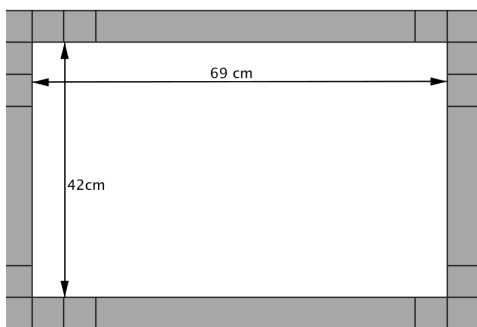
3°) Quel nombre trouve-t-il quand il applique le programme au nombre $\frac{1}{2}$? (indice 1)

4°) Clément prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, on peut trouver le résultat final en une étape. A-t-il raison ? (**Indice 2**)

5°) On souhaite obtenir 4,5 comme résultat. Quel nombre doit-on choisir au départ ?

PROBLEME (8 points)

Les dimensions ne sont pas respectées sur la figure



Dans une brocante, Julie a trouvé un miroir rectangulaire de dimensions 69 cm sur 42 cm. Elle souhaite le restaurer.

Pour cela, elle veut rajouter une rangée de petites mosaïques de forme carrée de côté le plus grand possible tout autour. La longueur d'un côté d'une mosaïque étant un nombre entier de centimètres.

Elle collera le miroir et les mosaïques sur une planche fine.

1°) Déterminer la dimension d'un côté de la mosaïque. (**Indice 3**)

2°) Combien de carrés de mosaïques doit-elle acheter ? (**Indice 4**)

3°) Déterminer les dimensions de la planche sur laquelle sont collés le miroir et les mosaïques.

4°) Pour transporter son objet fini, Julie a trouvé un carton d'emballage de dimensions 70 cm x 35 cm x 50 cm.

Peut-elle utiliser ce carton ? (**Indice 5**)



Indices possibles

Indice 1 : Transformer $1/5$ en écriture décimale puis calculer

Indice 1 : Transformer $1/2$ en écriture décimale puis calculer

Indice 2: Pour cela, il cherche une formule en utilisant n comme nombre de départ, aide le à trouver les bonnes formules parmi celles proposées :

a) $n+3^2 -n^2 -9$

b) $(n+3)^2 -n^2 -9$

c) $6n$

d) $3n^2 - n^2 -9$

Indice 2 : Clément remarque que l'on obtient toujours le triple du nombre de départ. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit n 'importe quel nombre au départ de ce programme de calcul ?

Justifier la réponse en prenant n comme nombre de départ.

Indice 2' : aide le à trouver les bonnes formules parmi celles proposées :

a) $n + 4 \times 3 -12$

b) $(n +4) \times 3 -12$

c) $4n \times 3 -12$

d) $4n + 4 \times 3 -12$

e) $3n$

Indice 3 : Le côté de la mosaïque doit être un diviseur commun à 69 et 42

Indice 4 : Déterminer le nombre de mosaïques sur la longueur, puis sur la largeur et penser à compter celles qui sont aussi dans les coins ! aidez vous de la figure donnée.

Indice 5' : Si vous n'avez pas trouvé les dimensions de l'objet fini, je vous propose de répondre à cette question avec :

Longueur = 76 cm et largeur = 49 cm.

Indice 5 :

On peut peut être mettre le miroir en diagonale dans le carton !

à vérifier par le calcul ou par un schéma à l'échelle ! bien expliquer la démarche. Penser à une vue de dessus.

EXERCICE N°1 :

1°) Égalité 1 : $(a-5)^2 = a^2 - 25$ c'est faux, deux possibilités justes : $(a-5)^2 = a^2 - 10a + 25$ ou $(a-5)(a+5) = a^2 - 25$

Égalité 2 : $\frac{2^8 \times 5^7}{5^2 \times 2^3} = 2^{8-3} \times 5^{7-2} = 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$ donc elle est vraie

2°) a) $M = (2x+11)^2 - (2x-11)^2 = (4x^2 + 44x + 121) - (4x^2 - 44x + 121)$
 $= 4x^2 + 44x + 121 - 4x^2 + 44x - 121 = 88x$

b) On remplace x par 1000 et on obtient : $2011^2 - 1989^2 = 88 \times 1000 = \underline{\underline{88\ 000}}$

Ou

2°) a) $N = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

b) Calculons N pour $x = 4$ $N = (2 \times 4 + 3)^2 = 11^2 = 121$

puis $x = -5$ $N = (2 \times (-5) + 3)^2 = (-7)^2 = 49$

3°) Calculer astucieusement :

$V = 105 \times 95 = (100 + 5)(100 - 5) = 100^2 - 5^2 = 10\ 000 - 25 = 9975$

EXERCICE N°2 :

1°) Appliquons le programme au nombre 2 : $(2+3)^2 - 2^2 - 9 = 25 - 4 - 9 = \underline{\underline{6}}$. **On obtient bien 6.**

2°) Appliquons le programme au nombre 7 : $(7+3)^2 - 7^2 - 9 = 100 - 49 - 9 = \underline{\underline{42}}$

3°) Appliquons le programme au nombre $\frac{1}{5}$: $(\frac{1}{5}+3)^2 - (\frac{1}{5})^2 - 9 = (\frac{16}{5})^2 - \frac{1}{25} - 9 = \frac{256}{25} - \frac{1}{25} - 9 = \frac{256}{25} - \frac{1}{25} - \frac{225}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

4°) Appliquons le programme au nombre n : $(n+3)^2 - n^2 - 9 = n^2 + 6n + 9 - n^2 - 9 = \underline{\underline{6n}}$.

On peut calculer en une étape en **multipliant le nombre départ par 6.**

5°) Le nombre pour lequel le résultat du programme donne (-30) est $-30 : 6 = \underline{\underline{-5}}$

ou

1°) Avec le nombre 1, : $(1+4) \times 3 - 12 = 5 \times 3 - 12 = 15 - 12 = 3$ donc on obtient bien 3.

2°) Avec le nombre 5 : $(5+4) \times 3 - 12 = 9 \times 3 - 12 = 27 - 12 = 15$ donc on obtient 15.

3°) Lorsque le nombre choisi est $\frac{1}{2}$: $(\frac{1}{2} + 4) \times 3 - 12 = (\frac{1}{2} + \frac{8}{2}) \times 3 - 12 = \frac{9}{2} \times 3 - 12 = \frac{27}{2} - \frac{24}{2} = \frac{3}{2}$

4°) En prenant n comme nombre de départ : $(n+4) \times 3 - 12 = 3n + 12 - 12 = 3n$, on obtient donc toujours le triple du nombre de départ.

5°) On souhaite obtenir 1,5 comme résultat donc $3n = 1,5$ et $n = 1,5 : 3 = \underline{\underline{0,5}}$ **Il faut choisir 0,5 au départ.**

PROBLEME :

1°) Déterminons la dimension d'un côté de la mosaïque carrée.

On cherche le PGCD de 69 et 42 :

$\text{PGCD}(69 ; 42) = 3$ donc le côté de la mosaïque sera de **3cm**.

69	42	27
42	27	15
27	15	12
15	12	3
12	3	0

2°) Nombre de carrés de mosaïques qu'il doit acheter :

$$69 : 3 = 23 \quad \text{et} \quad 42 : 3 = 14$$

$$23 \times 2 + 14 \times 2 + 4 = \mathbf{78 \text{ mosaïques}}$$
 (ne pas oublier les 4 mosaïques dans les 4 coins)

3°) Déterminons les dimensions de la planche sur laquelle sont collés le miroir et les mosaïques.

$$69 + 2 \times 3 = 75 \text{ cm de long}$$

$$42 + 2 \times 3 = 48 \text{ cm de large}$$

4°) Pour transporter son objet fini, Julie a trouvé un carton d'emballage de dimensions 70 cm x 35 cm x 50 cm.

En hauteur, il passera puisque $48 < 50$.

On doit calculer la diagonale du carton dans le triangle ABC rectangle en B à l'aide de la propriété de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 70^2 + 35^2 = 6125 \quad \text{et} \quad AC = \sqrt{6125} \approx 78,26 \text{ cm}$$

Comme le miroir mesure 75cm, c'est plus petit que 78,26 cm alors il passera dans le carton en diagonale.

Autre possibilité : tracer à l'échelle et faire la même vérification.

