CHERCHER ET DÉMONTRER AU COLLÈGE

AVANT-PROPOS

Ce document de travail a été réalisé en s'inspirant de plusieurs ouvrages et publications :

- « Démontrer et évaluer au collège » ~ CRDP de l'académie de Versailles.
- « Lire - comprendre - chercher - démontrer - des activités pour développer les savoir-faire en mathématiques » ~ IREM de Brest.
- « Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée » ~ coédition de l'IREM de Montpellier et de l'APMEP.
- « Les pratiques du problème ouvert » ~ CRDP Académie de Créteil.
- « Concepts clés et situations-problèmes en mathématiques » ~ Hachette Éducation.
- « Pour une culture mathématiques accessible à tous » ~ CREM
- « *icosaweb.ac-reunion.fr/RsrcPeda/Cinq/Docs/prgms/page08/page08.htm* »

Des activités faites par certains de nos collègues sont incluses dans ce document.

Les formateurs

SOMMAIRE

1ÈRE PARTIE

2ÈME PARTIE

ANALYSE DES PROGRAMMES

Extrait des programmes du collège
B.O. spécial n°6 du 28 août 2008-10-08 – page 11–

Une initiation très progressive à la démonstration

La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. **Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.**

À cet égard, deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, **ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré**. En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction, risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège.

La rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur, et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit.

Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, « **recherche et production d'une preuve** » qui **doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale**. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles.

La prise de conscience de ce que sont la recherche et la mise en œuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, l'enseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.

Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de **distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée**. En particulier, l'enseignant doit **préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis**.

LANGAGE ET LOGIQUE

A - Le vocabulaire des énoncés et des démonstrations

Références :

- **Introduction générale pour le collège (*BO* n° 4, hors série, du 9 septembre 2004) ;**
- ***BO* n° 6, hors série, du 19 avril 2007 ;**
- **composition des textes scientifiques, recommandations de l'Inspection générale (accessible sur le serveur académique Euler : euler.ac-versailles.fr).**
- **Socle commun, informations pratiques et grilles de référence disponibles sur eduscol.education.fr/socle commun**

1. Le vocabulaire des énoncés

- **Soit, étant donné, on considère** : pour présenter des objets.
- **Données, hypothèses** : termes utilisés pour parler de l'énoncé.
- **Consécutifs, distincts, respectifs, successifs** : ces mots ne sont pas forcément connus des élèves à l'entrée au collège.
- **Quelconque** : désigne l'élément générique d'un ensemble. Attention, un triangle quelconque est un triangle qui n'est pas particulier, ni rectangle, ni isocèle, ni équilatéral.
- **Quel que soit, quels que soient, quelle que soit, tout, tous** : conditions d'utilisation à préciser.

- **La... de... du...** : bien expliciter comment lire un enchaînement de compléments de noms.
- **Le ou un ?** : le rayon, un rayon du cercle C.
- **Une ou des ?** : il y a un pluriel de précaution : l'équation a-t-elle des solutions ? Certains adjectifs employés au singulier ou au pluriel n'appellent pas la même syntaxe : parallèle, perpendiculaire, colinéaire, etc.

- **Dessiner, tracer, placer, représenter, construire** : expliciter et respecter la hiérarchie de ces verbes.
- **Vérifier que, expliquer pourquoi, prouver que, montrer, démontrer** : les deux premiers appellent moins de formalisation que les trois derniers.
- **En déduire** : utiliser un résultat obtenu pour en justifier d'autres.
- **Factoriser, développer, effectuer** : les deux premiers renvoient à des gestes techniques.
- **Comparer, classer** : renvoient à une définition.
- **Déterminer, calculer** : renvoient à autre chose que des mesures.
- **Résoudre** : renvoie à des gestes techniques.
- **Conjecturer** : invite à formuler un énoncé.
- **Vrai, faux** : s'appliquent à des phrases dont on veut savoir si elles sont des propriétés (des théorèmes).

2. Le vocabulaire des démonstrations

- **Soit** : introduction d'un objet utile à la démonstration.
- **Données, hypothèses** : termes utilisés pour parler de l'énoncé.
- **Donc, car, parce que, puisque, or** : bien expliciter leurs conditions d'utilisation.
- **donc... donc... donc...** : marquent les étapes de conclusions partielles à la conclusion définitive (ne concluent pas au même niveau).

B - La logique toujours présente

- **Condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante :** Même si l'on définit rigoureusement les opérateurs de la logique des propositions, dans le langage accessible au élèves on les remplace par des mots comme « *si ... alors* » ou « *si et seulement si* ».
- **Propriété caractéristique** : une propriété caractéristique est une propriété qui pourrait remplacer la définition (*ce qui suppose qu'on a donné une*).
- **Réciproque** : la réciproque d'une propriété qui s'écrit « Si A alors B » s'énonce « Si B alors A » ; on peut juger si elle est vraie ou fausse.

C - Autour du signe « = »

1. Les différents statuts du signe « = »

Extrait du document d'accompagnement - *du numérique au littéral* -

Le signe « = » est introduit très tôt à l'école primaire et, au cours de la scolarité, il est utilisé avec plusieurs significations qui sont rarement explicitées avec les élèves.

À l'école élémentaire

- Le signe « = » est le plus souvent utilisé pour annoncer un résultat, comme par exemple dans 8 + 13 = 21. Le signe « = » est alors lu comme signifiant « ça donne », « ça fait », et il apparaît comme étant orienté « gauche-droite ». Des écritures comme :
2,3 + 3,8 = 6,1 – 1,5 = 4,6, produites à l'occasion de la résolution d'un problème, témoignent de cette conception. Cette signification correspond à celle de la touche [=] des calculatrices ordinaires.

- Le signe « = » est encore utilisé pour communiquer la décomposition d'un nombre. C'est le cas lorsque l'élève décompose un nombre sous forme de produit (36 = 4 x 9) ou, plus fréquemment lorsqu'il décompose un nombre, entier ou décimal, suivant les puissances de la base dans notre système de numération décimale. Ainsi l'égalité :
2304 = 2 x 1000 + 3 x 100 + 4 traduit que 2304 c'est deux milliers, 3 centaines et 4 unités. De même l'égalité $2{,}73=2+7\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{100}$ traduit que 2,73 c'est 2 unités, 7 dixièmes et 3 centièmes. - Enfin, mais plus rarement, le signe « = » est utilisé pour signifier que deux écritures représentent un même nombre. Ainsi, lorsque les élèves ont à placer le nombre $\frac{7}{4}$ sur une demi-droite graduée en quarts, ils peuvent voir $\frac{7}{4}$ comme étant quatre quarts plus trois quarts, c'est-à-dire une unité et trois quarts, ou encore comme étant huit quarts moins un quart, c'est-à-dire deux unités moins un quart, et écrire $1+\frac{3}{4}=2-\frac{1}{4}$.
Le signe d'égalité exprime alors une relation symétrique et transitive.

Au collège
- L'emploi du signe « = » comme symbole exprimant qu'on a affaire à deux expressions d'un même objet mathématique devient prédominant, notamment pour les expressions littérales, comme par exemple $a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}$.
- Le signe « = » est également utilisé pour traduire une identité. Il signifie alors que quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, les valeurs « retournées » par les deux expressions figurant de part et d'autre du signe « = » sont égales. Il rend compte de l'universalité d'un énoncé comme par exemple $k(a+b) = ka+kb$.
- Le signe « = » acquiert encore un autre statut dans l'écriture d'une équation. Au lieu d'être utilisé pour écrire des égalités vraies, il apparaît dans des énoncés dont on se demande s'ils peuvent être rendus vrais. En substituant à l'inconnue une valeur numérique, on obtient une égalité qui est ou bien vraie ou bien fausse. Le but de la résolution est de trouver toutes les valeurs qui substituées à l'inconnue donnent une égalité vraie. Cet usage du signe « = » apparaît en rupture avec l'utilisation qui en était faite jusque là et qui sous-entendait le vrai.
- Enfin, le signe « = » est utilisé comme symbole d'affectation, comme par exemple lorsque qu'on se propose de calculer $a+2b$ pour $a = 1{,}3$ et $b = 0{,}7$.

2. Quelques usages illicites

Utiliser le signe « = » dans des suites de calculs : 3 + 4 = 7 × 8 = 56-9 = 47.
Plus généralement, mieux vaut ne pas écrire des chaînes d'égalités.
Si on veut écrire des égalités successives, ***on peut nommer l'objet à calculer*** (donner un nom est toujours une bonne idée en mathématiques).

Le signe « = » de certaines calculatrices (il tend à disparaître) doit être remplacé (au moins mentalement) par « exécution de la séquence programmée ».

3. <u>Démontrer une égalité A = B</u>

Le plus souvent, il s'agit d'une identité. Toutes les écritures doivent donc être quantifiées.

Une fois ce préalable posé, toutes les façons de faire correspondent à des transformations d'écritures : de A en B ou de B en A ou de A et B en C. On peut aussi montrer que : A - B = 0.

C'est la logique du calcul qui importe : ne pas transformer l'écriture A = B, un nombre fini de fois, pour obtenir par exemple 0 = 0. Cela ne constitue pas une preuve.

LES DIFFÉRENTS TYPES DE RAISONNEMENT

II est indispensable de faire des démonstrations aussi bien dans le domaine numérique qu'en géométrie pour :

• donner du sens aux notions abordées ;
• structurer, renforcer les connaissances, les décloisonner ;
• introduire de nouveaux outils pour démontrer ;
• articuler les notions entre elles ;
• acquérir des compétences dans le domaine du raisonnement...

De plus, on doit :

• réserver le mot « démonstration » à de vraies démonstrations mathématiques, ne pas l'utiliser pour des illustrations de raisonnements ;
• qualifier systématiquement les énoncés (définition, propriété, théorème) à distinguer des « méthodes » ou « illustrations » ;
• signaler systématiquement un énoncé admis ;
• la progression choisie détermine les démonstrations possibles ;
• il ne s'agit pas de faire toutes les démonstrations de la liste mais de déterminer en équipe pédagogique celles qui seront faites par toutes les classes.

❖ Différents types de raisonnement rencontrés au collège

• LE RAISONNEMENT DÉDUCTIF

La règle de la déduction se lit ainsi :

- si P est vraie
- et si P $\Rightarrow$ Q vraie
- alors l'assertion Q est vraie.

Un raisonnement est dit *déductif* s'il ne s'appuie que sur la règle de déduction
Cette règle est en fait une définition de ce que signifie qu'une implication est vraie. On l'emploie tout le temps sans même s'en rendre compte.
NB : Le premier pas est toujours de savoir appliquer une définition ou de savoir montrer qu'un objet satisfait les conditions données dans une définition.

• LE RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DE CAS

Pour montrer une propriété par disjonction des cas, on la prouve dans un nombre fini de cas, ces cas couvrant tous les cas possibles.

• L'INFIRMATION PAR PRODUCTION D'UN CONTRE-EXEMPLE

• LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer, puis par des déductions logiques (utilisant l'hypothèse) à aboutir à une absurdité.

❖ Quelles propriétés démontrer ? (doc 1)

COMPRENDRE ET CHERCHER

A – Lecture d'énoncés

1. Lire correctement un énoncé

Un élève en difficulté sur la lecture ne peut retenir le sens de ce qu'il lit.

« Dans le prolongement de l'école primaire, la place accordée à l'oral reste importante ».

Cf. Mathématiques/Introduction générale pour le collège - page 5 du BO Hors série n°5 du 9 sept. 2004

Il est donc important de faire lire à haute voix l'énoncé d'un problème et au besoin le faire lire plusieurs fois.

2. Analyser un énoncé

Il est nécessaire de distinguer les données et les consignes.

3. Avoir une autre présentation du problème à résoudre

L'élève doit être capable de comprendre « de quoi ça parle ». Pour le savoir, il faut qu'il soit capable de traduire la situation décrite dans un autre langage. Il peut s'agir :

- de raconter l'histoire autrement,
- de passer d'un texte écrit en français à un schéma ou à une figure géométrique.

4. définir un début de stratégie

EXEMPLES D'ACTIVITÉS POUR DÉVELOPPER LES CAPACITÉS DE LECTURE D'UN ÉNONCÉ

Le niveau concerné est essentiellement le niveau sixième.

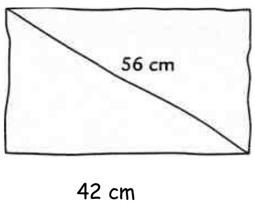
- **ACTIVITÉ 1 : Faire la différence entre « données » et « consignes » (doc 2)**
- **ACTIVITÉ 2 : Données manquantes (doc 3)**
- **ACTIVITÉ 3 : Consignes manquantes (doc 3)**

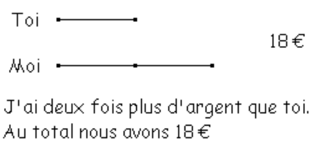
B – Schématisation

1. Qu'est-ce que schématiser ?

Un schéma est une représentation simplifiée d'un objet destinée à expliquer sa structure. C'est donc un outil pour résoudre un problème. Ce n'est pas une fin en soi, ni un dessin, ni une construction précise. Il est souhaitable de le réaliser à main levée.

Exemple de schémas :





2. Codage d'une figure géométrique.

⇒ **À propos des figures planes**

Figures
Objets concrets à l'école primaire

Figures
Objets plus mathématique au collège

- À l'école primaire :

Les figures sont des objets concrets. Les propriétés sont vérifiées à l'aide des instruments. L'appréhension des objets dessinés est automatique et permet d'identifier les formes. On parle d'**appréhension perceptive**. Elle correspond à ce que l'on voit au premier coup d'œil sur une figure, sans réflexion préalable. Les analyses qu'elle engendre, sont globales et se limitent à de simples constatations. Elle ne nécessite pas d'apprentissage mathématique pour fonctionner.

- Au collège :

- On essaie de renforcer l'étude des figures élémentaires et leurs propriétés.
- Les propriétés sont établies pour résoudre des problèmes.
- Une place centrale est donnée aux activités de construction.
- Le vocabulaire, qui n'est ni un préalable ni une fin en soi, est au service de l'activité géométrique.
- On fait une différence entre « figure » et « figure géométrique » qu'on peut aussi appeler « dessin ».

Une « figure » est un objet naturel.
Un « dessin » ou « figure géométrique » est un ensemble de points.
À l'école primaire les enfants commencent à reconnaître les formes et puis on les amène à la caractérisation des figures par un ensemble de points. (cf. : ouvrage de Stella BARUCK)

Le principal support à la démonstration est la figure géométrique. Le premier obstacle à l'apprentissage de la démonstration est donc, que l'observation de l'élève, à son entrée au collège, est simplement de nature perceptive ce qui entraîne une non-nécessité de justification. En opposition à l'appréhension perspective, on parle d'**interprétation discursive** d'une figure qui relève, elle, d'un apprentissage. Elle met en relation la figure avec un texte éclairant sur les propriétés de cette figure à prendre en considération. Cette interprétation est nécessaire à tout raisonnement déductif ou à toute démonstration basée sur une figure.

Une figure géométrique est réalisée avec des instruments. Toute démonstration part « de ce que l'on sait », des données, des hypothèses, … Bien que le codage n'ait aucun statut dans les programmes, il tient une place relativement importante dans l'apprentissage du raisonnement déductif.
Le codage n'est pas seulement un moyen d'obtenir les données d'une situation, il facilite aussi l'observation discursive* d'une figure, il permet d'indiquer les propriétés de la figure tenues pour vraies. Le travail sur le codage aide l'élève à distinguer les propriétés d'une figure établies comme vraies de celles qui sont de simples conjectures.

EXEMPLES D'ACTIVITÉS POUR DÉVELOPPER LES CAPACITÉS DE SCHÉMATISATION

❖ **ACTIVITÉ 1 : réaliser des schémas à partir de textes doc 4**

❖ **ACTIVITÉ 2 : déchiffrer des schémas doc 5**

❖ **ACTIVITÉ 3 : s'approprier les conventions de codage en géométrie doc 6**

C – Connaître et reconnaître les situations de références

Ces situations portent essentiellement sur le programme de géométrie.
Elles peuvent être des outils utiles pour démontrer.

EXEMPLES D'ACTIVITÉS POUR RECONNAÎTRE UNE SITUATION DE RÉFÉRENCE

- ACTIVITÉ 1 : **Reconnaître une situation de référence en géométrie** **doc 7**
- ACTIVITÉ 2 : **Reconnaître une situation de référence numérique** **doc 8**

D – Construire une stratégie

La stratégie à construire dépend du problème posé et de la manière dont il est posé.

E – Prendre des initiatives

Les activités qui suivent ont pour objectif d'aider les élèves à produire des démonstrations. Ces techniques d'apprentissage peuvent revêtir des formes variées. Nous aborderons ici :

1. Les phrases à trous **(doc 9)**
2. Les phrases dans le désordre (puzzles) **(doc 10)**
3. A partir d'une solution d'exercice…**(doc 11)**
4. Les déductogrammes **(doc 12)**
5. A partir d'une figure **(doc 13)**
6. Radioscopie d'un théorème **(doc 14)**
7. Le jeu **(doc 15)**
8. Les problèmes ouverts **(doc 16)**
9. La narration de recherche **(doc 17)**
10. Le débat scientifique **(doc 18)**
11. Les situations problèmes **(doc 19)**

CONCLUSION

« Chercher et démontrer » quoi en mathématiques ?
On cherche à démontrer un « concept » (propriété d'une figure géométrique, un résultat numérique…).
Comment y parvenir ?

L'AVANT…

La mise en place d'un concept peut se faire :

- de **façon magistrale**,
- par un « **débat scientifique** »
- par la recherche d'une « **situation-problème** »

L'APRÈS…

Une fois le concept mis en place comment peut-on l'utiliser ?

- par la recherche d'un « **problème classique** » (données/questions)
- par la recherche d'un « **problème ouvert** » (questions seulement)

Dans la manière de résoudre ces problèmes on peut s'attacher :

- au contenu,
- à la rédaction de la solution (**narration de recherche**),
- à la **correction de l'erreur**, c'est-à-dire à la correction que fait l'élève de son travail écrit.

Un bon thème de travail de recherche est fourni par les « **énigmes** » **(doc 20)** que l'on peut inclure dans un devoir maison. Les élèves prennent souvent du plaisir à chercher leur solution et sollicite souvent leur entourage pour y parvenir.