Sujet : Les chaînes d'additions

Recherches effectuées par Sophie LAFENETRE et Clément BOUCHET, élèves de TS du lycée Sud Médoc (Gironde)

Enseignants : Carine Burbeau et Dominique Grihon

Chercheur : Laurent Habsieger

Le sujet

On part de 1 ; on lui ajoute 1, on obtient 2 ; on a maintenant 2 nombres à notre disposition ; on peut donc ajouter 1 et 2 ou 2 et 2 ; on a maintenant 2 chaînes : $1 \to 2 \to 3$ et $1 \to 2 \to 4$ et on continue ainsi.

Une conjecture nous a été proposée, il s'agit de montrer que, pour tout n, on a :

$$L(2^n - 1) \leq n - 1 + L(n)$$

$L(n)$ étant la longueur de la chaîne la plus courte pour arriver à n.

1°) Les puissances de 2

Expérimentalement, on constate que : $L(2^0) = L(1) = 0$, $L(2^1) = L(2) = 1$, $L(2^2) = L(4) = 2$

On a donc la relation suivante à démontrer : $L(2^n) = n$ avec n entier naturel

a) Obtention de la relation : $L(2^n) \leq n$

• on obtient les multiples de 2 en ajoutant le nombre obtenu à lui même ce qui revient à multiplier par 2. Donc pour aboutir à 2^n il a fallu n fois multiplier par 2 . Mais, même si on est sûr d'arriver à 2^n, on ne sait pas si cette chaîne est la plus courte, d'où la relation $L(2^n) \leq n$

b) Démonstration de la relation : $L(2^n) \geq n$

On va montrer que tout nombre obtenu au bout de p étapes est inférieur ou égal à 2^p.

• Au bout de une étape, on obtient 2. Donc la relation est vérifiée au rang 1.

• On suppose que tous les nombres obtenus à la $p^{\text{ième}}$ étape sont plus petits que 2^p ;

soit X_{p+1} un nombre obtenu au bout de $p + 1$ étapes ; alors il a été obtenu en ajoutant deux nombres X_i et X_j eux-mêmes obtenus à des étapes inférieures ou égales à p ; donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $X_i \leq 2^p$ et $X_j \leq 2^p$.

Alors $X_{p+1} = X_i + X_j \leq 2^p + 2^p$, d'où $X_{p+1} \leq 2^{p+1}$

Donc pour obtenir 2^n il faut au moins n étapes .

c) Conclusion : puisque $L(n)$ est à la fois inférieur ou égal à n et supérieur ou égal à n , alors $L(2^n) = n$.

2°) Expression de $L(2^n - 1)$

Exemple de chaîne :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & \to & 2^1 & \to & 2^2 & \to & 2^3 & \to & & \to & 2^{n-1} \\ & + & 2^0 & + & 2^1 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & 2^{n-2} \end{array}$$

Pour obtenir tous ces nombres il a fallu $n - 1$ étapes. Or, si on additionne tous les nombres obtenus, on obtient la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 : $S = 1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Donc pour obtenir $2^n - 1$, on peut fabriquer la chaîne suivante :

$1 \to 2^1 \to 3 \to 2^2 \to 7 \to 2^3 \to 15 \to 2^4 \to ... \to 2^{n-2} \to 2^{n-1} - 1 \to 2^{n-1} \to 2^n - 1$

La construction de cette chaîne a nécessité $2n - 2$ étapes .On a donc : $L(2^n - 1) \leq 2n - 2$

3°) Démonstration de la conjecture pour $n = 2^m$

Pour $n = 2^m$, la conjecture devient :

$$L(2^{2^m} - 1) \leq 2^m - 1 + m$$

On construit la chaîne suivante :

$$\underset{m=1}{1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 12 \to 15 \to 30 \to 60 \to 120} \to \underset{m=2}{240 \to 255 \ldots \to 2^{2^{k-1}} - 1} \to \underset{m=k}{\ldots 2^{2^k} - 1}$$

$$\underset{m=3}{} \qquad \underset{m=k-1}{} \qquad \underset{m=k}{}$$

Ainsi, on passe du terme $2^{2^{k-1}} - 1$ au terme $2^{2^k} - 1$ en multipliant par $2^{2^{k-1}} + 1$ ce qui représente $2^{k-1} + 1$ étapes.

On en déduit alors que : $L\left(2^{2^m} - 1\right) \leq \sum_{k=0}^{m-1} (2^k + 1)$ soit encore :

$$L\left(2^{2^m} - 1\right) \leq 2^m + m - 1$$