PROUHET-TARRY-ESCOTT

LAURENCE BOCLE, REMI BLOCH, JULIEN TERRIER, MATHIEU ZOUBERT
1ERE S LYCEE MONTAIGNE BORDEAUX

LE PROBLÈME DE PROUHET-TARRY-ESCOTT :

Soient A = ($a_1,\ldots,a_s$) et B = ($b_1,\ldots,b_t$) deux familles d'entiers naturels, et soit *k* un entier naturel. On dit que A et B sont *k*-équivalents et on note $A \equiv_k B$, si la condition

$$\forall j \in \{0,1,\ldots,k\} \qquad \sum_{i=1}^{s} a_i^j = \sum_{i=1}^{t} b_i^j$$

est vérifiée. En particulier, lorsque j = 0, cela entraîne que s = t .
Par exemple, $(0, 4, 5) \equiv_2 (1, 2, 6)$ car 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 , 0 + 4 + 5 = 1 + 2 + 6 = 9 et $0^2 + 4^2 + 5^2 = 1^2 + 2^2 + 6^2 = 41$, mais (0, 4, 5) n'est pas 3-équivalent à (1, 2, 6) car $0^3 + 4^3 + 5^3 = 189 \neq 225 = 1^3 + 2^3 + 6^3$.

On se fixe maintenant une valeur de *k* et on recherche des familles A at B telles que $A \equiv_k \not B$ et $A \equiv_{k+1} B$. On note T(k) le nombre minimal d'éléments de ces familles ; on veut étudier la fonction T(k).

On suppose $A \equiv_k B$, avec A = ($a_1, a_2,\ldots, a_n$) et B = ($b_1, b_2,\ldots, b_n$). Montrer que pour tout entier d, $A' \equiv_k B'$, avec A'= ($a_1, a_2,\ldots, a_n, b_1 + d, b_2 + d,\ldots, b_n + d$) et B'= ($b_1, b_2,\ldots, b_n, a_1 + d, a_2 + d,\ldots, a_n + d$). Par exemple, en partant de A = (0, 3) et B = (1, 2), on prend d = 3 et on obtient $(0, 3, 4, 5) \equiv_2 (1, 2, 3, 6)$ c'est-à-dire $(0, 4, 5,) \equiv_2 (1, 2, 6)$. En recommençant avec d = 5, on trouve $(0, 4, 5, 6, 7, 11) \equiv_3 (1, 2, 6, 5, 9, 10)$ c'est-à-dire $(0, 4, 7, 11) \equiv_3 (1, 2, 9, 10)$. Tenter d'obtenir des petites solutions ainsi .

COMMENT TROUVER DEUX ENSEMBLES k+1 EQUIVALENTS A PARTIR DE DEUX ENSEMBLES k EQUIVALENTS

Soient :

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \text{ et } B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$$

$$\text{tels que } A \equiv_k B \text{ avec } n \in N^* \text{ et } k \in N$$

On se propose de démontrer que :

$$A' \equiv_{k+1} B'$$

$$A' = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1 + d, b_2 + d, \cdots, b_n + d\}$$

$$\text{avec } B' = \{b_1, b_2, \cdots, b_n, a_1 + d, a_2 + d, \cdots, a_n + d\} \text{ et } d \in N$$

Il faut donc prouver que :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left(a_i^{k+1} + (b_i + d)^{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(b_i^{k+1} + (a_i + d)^{k+1}\right)$$

Ainsi que

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^k+(b_i+d)^k\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_i^k+(a_i+d)^k\right)$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^{k-1}+(b_i+d)^{k-1}\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_i^{k-1}+(a_i+d)^{k-1}\right)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^0+(b_i+d)^0\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_i^0+(a_i+d)^0\right)$$

Formule utilisée : $(a+b)^j=\sum_{i=0}^{j}\left(\alpha_i a^i b^{j-i}\right)$

Soit: **S** = $\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^{k+1}+(b_i+d)^{k+1}\right)=a_1^{k+1}+a_2^{k+1}+\cdots+a_n^{k+1}+(b_1+d)^{k+1}+(b_2+d)^{k+1}+\cdots+(b_n+d)^{k+1}$

de même :

S' = $\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_1^{k+1}+(a_i+d)^{k+1}\right)=b_1^{k+1}+b_2^{k+1}+\cdots+b_n^{k+1}+(a_1+d)^{k+1}+(a_2+d)^{k+1}+\cdots+(a_n+d)^{k+1}$

Or puisque $A\equiv_k B$, on a :

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k=b_1^k+b_2^k+\cdots+b_n^k$$
$$a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+\cdots+a_n^{k-1}=b_1^{k-1}+b_2^{k-1}+\cdots+b_n^{k-1}$$
$$=$$
$$=$$
$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

En développant S et S' avec la formule indiquée pour des valeurs de j allant de 0 à k+1, on remarque que les termes a_i^{k+1},b_i^{k+1} apparaissent de la même manière dans S et S' et que les sommes précédentes apparaissent aussi avec les mêmes coefficients, donc :

S=S'

de même, il est facile de démontrer que :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^k+(b_i+d)^k\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_i^k+(a_i+d)^k\right)$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^{k-1}+(b_i+d)^{k-1}\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_i^{k-1}+(a_i+d)^{k-1}\right)$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i^0+(b_i+d)^0\right)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(b_i^0+(a_i+d)^0\right)$$

Donc :

Si $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\equiv_k\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$

Alors

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1+d,b_2+d,\cdots,b_n+d\}\equiv_{k+1}\{b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1+d,a_2+d,\cdots,a_n+d\}$$

Calcul de T(0) :

On a $(2)\equiv_0(6)$ car $2^0=6^0=1$. Puisqu'on a un exemple où T(0)=1, alors **T(0)$\leq$1**.
Si T(0)=0, alors A et B n'ont pas de sens, donc **T(0)>0.**
On a 0<T(0)$\leq$1.Comme on cherche la plus petite valeur entière de T(0), on a **T(0)=1.**

Calcul de T(1) :

On veut démontrer que T(1) = 2.
On montre d'abord que T(1)$\leq$2.

On a un exemple d'ensembles 1-équivalents à 2 éléments $\{6;4\}\equiv_1\{3;7\}$ car $\begin{cases}1+1=1+1\\6+4=3+7\end{cases}$.

Donc T(1)$\leq$2.

On montre ensuite que T(1) > 1.
Si T(1) = 1, alors on a A = (a) et B = (b) ce qui implique a=b et A=B. Par définition c'est impossible.Donc T(1)>1.

1 < T(1) $\leq$ 2. T(1) la plus petite valeur entière. T(1) = 2.

Calcul de T(2) :

On conjecture maintenant que T(k) = k + 1. Vérifions que T(2) = 3 .
On verra d'abord que $T(2)\leq 3$ **puis que** $T(2)>2$

On sait que $T(2)\leq 3$ Car on un exemple de 2 ensembles 2-équivalents avec 3 éléments.
$\{0,4,5\}\equiv_2\{1,2,6\}$

En effet on a $\begin{cases}1+1+1=1+1+1\\0+4+5=1+2+6\\0+16+25=1+4+36\end{cases}$

On va chercher à prouver par l'absurde que $T(2)\neq 2$ donc que $T(2)>2$

Si $T(2)=2$ alors il existe 2 ensembles A et B 2-équivalents avec 2 éléments tels que:

$$\begin{matrix}A=\{a,b\}\\B=\{c,d\}\end{matrix}\quad \text{avec}\quad a\neq c,\ a\neq d\ \ \text{et } b\neq c,\ b\neq d$$

$$A\equiv_2 B \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2=c^2+d^2\\a+b=c+d\\a^0+b^0=c^0+d^0\end{cases}$$

$a = c + d - b$

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0 \;\; \blacklozenge$

On remplace a par $c + d - b$

$\blacklozenge \Leftrightarrow 2b^2 - 2bc - 2bd + 2cd = 0$

$\blacklozenge \Leftrightarrow 2(b^2 - bc - bd + cd) = 0$

$\blacklozenge \Leftrightarrow 2(b-c)(b-d) = 0$

$\blacklozenge \Leftrightarrow b = c$ ou $b = d$

Comme $a = c + d - b,$ on a : $a = d$ ou $a = c$ et $b = c$ ou $b = d$, ce qui est **Impossible** car A et B seraient les mêmes ensembles.

On en déduit alors que $T(2) > 2$.
Ainsi on a $2 < T(2) \leq 3 \Leftrightarrow T(2) = 3$ car T(2) doit être un entier naturel.

Calcul de T(3) :

On se propose de prouver que T(3)=4 ; Pour cela, nous verrons dans un premier temps que T(3) > 3 :

Dire que T(3)=3 implique le système suivant :

(s) $$\begin{cases} 1+1+1 = 1+1+1 \\ a+b+c = d+e+f \\ a^2+b^2+c^2 = d^2+e^2+f^2 \\ a^3+b^3+c^3 = d^3+e^3+f^3 \end{cases}$$

En élevant L_1 au carré et en lui soustrayant L_2, on obtient la deuxième ligne d'un système équivalent :

On sait que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

Donc : $\dfrac{((a+b+c)^2 - L_2}{2} = L_2^{'}$

De la même manière, si on élève au cube L_1 et en combinant avec L_2 et L_3, on obtient :

On a $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c+3c^2b+3b^2a+3c^2a+6abc$

D'où $\dfrac{((a+b+c)^3 - 3L_1 \times L_2) + 2L_3}{6} = L_3^{'}$

On obtient le système auxiliaire suivant :

(s') $$\begin{cases} a+b+c = d+e+f \\ ab+bc+ca = de+ef+fd \\ abc = def \end{cases}$$

Ce système traduit l'égalité de deux polynômes :
$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ et $Q(x)=(x-d)(x-e)(x-f)$
car en les développant, on obtient des coefficients égaux.
Or ces deux polynômes sont égaux si et seulement si $\{a,b,c\}=\{d,e,f\}$**; ce qui contredit nos hypothèses, donc on sait que T(3) > 3.**

Étudions les deux ensembles suivants : A = {1,4,5,8} et B = {2,2,7,7}

$$\begin{cases} 1+4+5+8=2+2+7+7=18 \\ 1+16+25+64=4+4+49+49=106 \\ 1+64+125+512=8+8+343+343=702 \end{cases}$$

Et l'égalité est fausse avec les puissances 4. (4978 et 4834)
A et B sont donc 3-équivalents.
On a donc T(3)<5.

<u>Conclusion :</u>
3 < T(3) < 5 et T(3) est un naturel, donc T(3) = 4.

Liste d'exemples de T(k)=k+1

$(6)\equiv_0(8)$

$(3;7)\equiv_1(6;4)$

$(0;4;5)\equiv_2(1;2;6)$

$(1;4;5;8)\equiv_3(2;2;7;7)$

$(0;8;13;25;26)\equiv_4(1;5;18;20;28)$

$(0;19;25;57;62;86)\equiv_5(2;11;40;42;69;85)$

$(0;18;19;50;56;79;81)\equiv_6(1;11;30;39;68;70;84)$

Nous pensons que pour 4, 5, 6 la méthode exposée pour 2 et 3 s'applique avec un peu plus de calculs…