Concours général 2008
Mathématiques
Éléments de correction

Exercice I

1) S est une parabole, dont le sommet est le point de coordonnées $(0,-3/2)$.

2-a) On a

$$g_U(x) = (x-u)^2 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)^2,$$

$$g'_U(x) = 2(x-u) + \frac{4x}{3}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{4v}{3}x - 2u,$$

$$g"_U(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4v}{3}.$$

Posons $\Omega_U = \{x \in \mathbf{R} | \, g''_U(x) = 0\}$ On a $\Omega_U = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 = v\}$. Donc $\Omega_U = \emptyset$ si $v < 0$, $\Omega_U = \{0\}$ si $v = 0$, et $\Omega_U = \{-\sqrt{v}, \sqrt{v}\}$ si $v > 0$.

2-b) Si $v \leq 0$, on a $g''_U(x) > 0$ pour $x \neq 0$,et $g''_U(0) \geq 0$, donc g'_U est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g'_U(x) = +\infty$, on voit que dans ce cas il existe un unique réel x_0 tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ si $x \in]-\infty, x_0[$ tandis que $g'(x) > 0$ si $x \in]x_0, +\infty[$. Donc g_U est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$ et g_U est strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Supposons maintenant que $v > 0$. Alors $g''_U(x) = \frac{4}{3}(x-\sqrt{v})(x+\sqrt{v})$, donc g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{v}, \sqrt{v}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$.
On a donc $g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v})$. D'autre part on a

$$g'_U(-x)g'_U(x) = \left(-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4v}{3}x - 2u\right)\left(\frac{4}{9}x^3 - \frac{4v}{3}x - 2u\right) = 4u^2 - \frac{16}{9}x^2\left(\frac{x^2}{3} - v\right)^2$$
$$= 4u^2 - \frac{16}{81}x^2(x^2 - 3v)^2.$$

En particulier on a

$$g'_U(-\sqrt{v})g'_U(\sqrt{v}) = 4u^2 - \frac{64}{81}v^3 = \frac{4}{81}(81u^2 - 16v^3).$$

Si $81u^2 - 16v^3 > 0$, on a deux possibilités

-ou bien $g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v}) > 0$. Dans ce cas $g'_U(x) \geq g'_U(\sqrt{v}) > 0$ pour tout $x \geq -\sqrt{v}$. Comme g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, et comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]-\infty, -\sqrt{v}[$ tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x < x_0$ tandis que $g'_U(x) > 0$ pour $x > x_0$.

-ou bien $g'_U(\sqrt{v}) < g'_U(-\sqrt{v}) < 0$. Dans ce cas $g'_U(x) \leq g'_U(-\sqrt{v}) < 0$ pour $x \leq \sqrt{v}$. Comme g'_U est strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$, et comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = +\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]\sqrt{v}, +\infty[$ tel que $g'_U(x_0) = 0$, et que $g'_U(x) < 0$ pour $x < x_0$ tandis que $g'_U(x) > 0$ pour $x > x_0$.

De même si $81u^2 - 16v^3 = 0$, on a deux possibilités

-ou bien $g'_U(-\sqrt{v}) > g'_U(\sqrt{v}) = 0$. Dans ce cas $g'_U(x) > g'_U(\sqrt{v}) = 0$ pour tout $x \in [-\sqrt{v}, \sqrt{v}[\cup]\sqrt{v}, +\infty[$. Comme g'_U est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, et comme $\lim_{x\to-\infty} g'_U(x) = -\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]-\infty, -\sqrt{v}[$ tel que $g_U'(x_0) = 0$, et que $g_U'(x) < 0$ pour $x < x_0$ tandis que $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]x_0, \sqrt{v}[\cup]\sqrt{v}, +\infty[$.

-ou bien $0 = g_U'(-\sqrt{v}) > g_U'(\sqrt{v})$. Dans ce cas $g_U'(x) < g_U'(-\sqrt{v}) = 0$ pour tout $x \in]-\infty, -\sqrt{v}[\cup]-\sqrt{v}, +\sqrt{v}]$. Comme g_U' est strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$, et comme $\lim_{x\to\infty} g_U'(x) = +\infty$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]\sqrt{v}, +\infty[$ tel que $g_U'(x_0) = 0$, et que $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -\sqrt{v}[\cup]-\sqrt{v}, x_0[$ tandis que $g_U'(x) > 0$ pour $x > x_0$.

Comme $81u^2 - 16v^3 \geq 0$ si $v \leq 0$ on voit que si $81u^2 - 16v^3 \geq 0$ il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ telle que g_U soit strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$ et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.

Comme $f_U = \sqrt{g_U}$, et comme la fonction $x \to \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on voit que f_U est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2-c) Supposons maintenant que $U \notin W$. On a alors $81u^2 - 16v^3 < 0$. En particulier $v > 0$ et g_U'(-$\sqrt{v}$)$g_U'(\sqrt{v}) < 0$. Donc $g_U'(-\sqrt{v}) > 0 > g_U'(\sqrt{v})$. Comme g_U' est strictement croissante sur $]-\infty, -\sqrt{v}]$, strictement décroissante sur $[-\sqrt{v}, \sqrt{v}]$ et strictement croissante sur $[\sqrt{v}, +\infty[$, on voit qu'il existe un unique $x_0 \in]-\infty - \sqrt{v}[$, un unique $x_1 \in]-\sqrt{v}, \sqrt{v}[$ et un unique $x_2 \in]\sqrt{v}, +\infty[$ tels que $g_U'(x_0) = g_U'(x_1) = g_U'(x_2) = 0$, et que $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, x_0[$, $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]x_0, x_1[$, $g_U'(x) < 0$ pour $x \in]x_1, x_2[$ et que $g_U'(x) > 0$ pour $x \in]x_2, +\infty[$. De même que plus haut, ceci entraine que f_U est strictement décroissante sur $]-\infty, x_0]$, strictement croissante sur $[x_0, x_1]$, strictement décroissante sur $[x_1, x_2]$ et strictement croissante sur $[x_2, +\infty[$.

3) Soit $a \in R$, et soit C le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$. La tangente en $M(a)$ à S a pour vecteur directeur $\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}$, et le vecteur $\overrightarrow{UM_a} = (a-u)\vec{i} + (\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v)\vec{j}$ est orthogonal à la tangente en $M(a)$ à C. On voit donc que les tangentes à C et S en $M(a)$ coincident si et seulement si $\left(\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}\right).\left((a-u)\vec{i} + (\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v)\vec{j}\right) = 0$. On a

$$\left(\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}\right).\left((a-u)\vec{i} + (\frac{a^2}{3} - v)\vec{j}\right) = (a-u) + \frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right) = \frac{g_U'(a)}{2}.$$

Par conséquent les tangentes à C et S en $M(a)$ coincident si et seulement si $g_U'(a) = 0$.

4-a) Soit $M \in \mathscr{P} \setminus S$. On sait d'après la question précédente que le cercle de centre U et de rayon $UM(x)$ est tangent à S en $M(x)$ si et seulement si $g_U'(x) = 0$. D'autre part g_U' est une fonction polynômiale de degré 3, donc l'équation $g'(x) = 0$ possède au plus trois racines réelles. Comme $\lim_{x\to-\infty} g_U'(x) = -\infty$, et comme $\lim_{x\to+\infty} g_U'(x) = +\infty$, cette équation possède au moins une racine réelle. Donc $n(U)$ ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3.

4-b) D'après la discussion des questions 2-c et 2-d, on sait que si $81u^2 - 16v^3 > 0$, alors l'équation $g_U'(x) = 0$ possède une solution sur $\mathbf{R}$, et que si $81u^2 - 16v^2 < 0$ alors l'équation $g_U'(x) = 0$ possède trois solutions distinctes sur $\mathbf{R}$. On a vu également que si $v > 0$, et si $81u^2 - 16v^3 = 0$, alors l'équation $g_U'(x) = 0$ possède exactement deux solutions sur $\mathbf{R}$. Comme $81u^2 - 16v^3 > 0$ pour $v < 0$, il ne reste plus qu'à examiner le cas où $u = v = 0$. Dans ce cas $g_U'(x) = \frac{4x^3}{9}$, donc léquation $g_U'(x) = 0$ admet 0 comme unique solution. On obtient la classification suivante, pour $U \in \mathscr{P} \setminus S$, :

-si $81u^2 - 16v^3 > 0$, ou si $u = v = 0$, alors $n(U) = 1$;

-si $81u^2 - 16v^3 = 0$, avec $v > 0$, alors $n(U) = 2$;

-si $81u^2 - 16v^3 < 0$, alors $n(U) = 3$.

5-a) La droite $D(a)$ a pour équation $y - \frac{a^2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2a}{3}(x-a)$, ce qui donne $a^2 - 2ax + +3(y + \frac{3}{2}) = 0$.

5-b) L'équation $U \in D(a)$ est équivalente à l'équation

$$a^2 - 2au + 3(v + \frac{3}{2}) = 0.$$

On reconnait une équation du second degré, avec $\Delta' = u^2 - 3(v + \frac{3}{2}) = 3(\frac{u^2}{3} - \frac{3}{2} - v)$. Donc si $v > \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, il n'y a pas de solution, si $v = \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, il y a une solution et une seule, et si $v < \frac{u^2}{3} - \frac{3}{2}$, il y a deux solutions distinctes. Ceci s'interprète géométriquement : si U est situé au dessus de S, il n'y a pas de solution, si $u \in S$, il y a une solution et une seule, et si U est situé en dessous de S, il y a deux solutions distinctes.

Notons que si $U \in S$ la solution unique est $a = u$, ce qui traduit le fait évident que si $U \in S$ alors $U \in D(u)$.

5-c) Comme a_1 et a_2 sont les deux solutions de l'équation $a^2 - 2au + +3(v + \frac{3}{2}) = 0$, on a $a_1 + a_2 = 2u$ et $a_1 a_2 = 3(v + \frac{3}{2})$. Si $UM(a_1) = UM(a_2)$, on a $g_U(a_1) - g_U(a_2) = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
0 &= (u - a_1)^2 - (u - a_2)^2 + \left(v - \frac{a_1^2}{3} + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(v - \frac{a_2^2}{3} + \frac{3}{2}\right)^2 \\
&= (2u - a_1 - a_2)(a_2 - a_1) + \frac{a_2^2 - a_1^2}{3}\left(2v - \frac{a_1^2 + a_2^2}{3} + 3\right) \\
&= \frac{2u}{3}(a_2 - a_1)\left(2v - \frac{(a_1 + a_2)^2}{3} + \frac{2}{3}a_1 a_2 + 3\right) = \frac{2u}{3}(a_2 - a_1)\left(2v - \frac{4u^2}{3} + 2v + 6\right) \\
&= \frac{8u}{3}(a_2 - a_1)\left(v - \frac{u^2}{3} + \frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

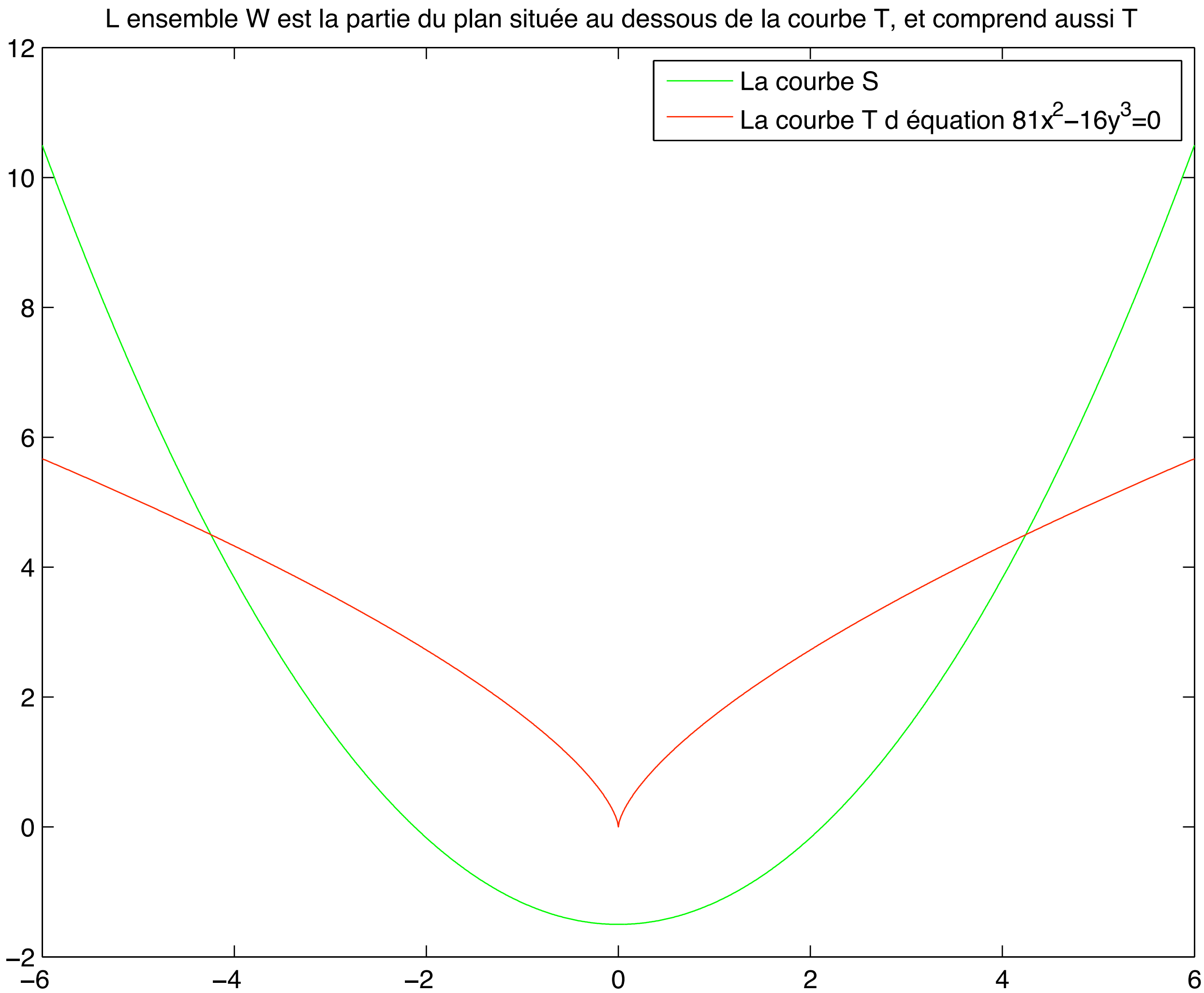
Comme $a_1 \neq a_2$, il résulte de la question précédente que $v - \frac{u^2}{3} + \frac{3}{2} < 0$, et on obtient $u = 0$.

5-d) La pente de la tangente en $M(a)$ à S étant égale à $\frac{2a}{3}$, les tangentes à S en deux points distincts de S sont concourantes. Supposons maintenant que U est le centre d'un cercle tangent à S en deux points distincts M et N de S, et soit V le point d'intersection des tangentes en M et N à S. Alors U appartient à la médiatrice D de MN, les droites (UM) et (UN) sont symétriques par rapport à D, et les droites (VM) et (VN), qui sont respectivement orthogonales à (UM) et (UN), sont également symétriques par rapport à D. Leur point d'intersection V appartient donc à D, et $VM = VN$.

5-e) Supposons de nouveau que U est le centre d'un cercle tangent à S en deux points distincts M et N de S, et soit V le point d'intersection des tangentes en M et N à S. Il résulte de la question 5-c que V appartient à l'axe Oy. Comme S est symétrique par rapport à Oy, la symétrique de la droite (VM) par rapport à Oy est tangente à S au point M_1 symétrique de M par rapport à Oy. Donc $M_1 = N$. Comme $(UM) \perp (VM)$, et comme $(UN) \perp (VN)$, on voit que (UM) et (UN) sont symétriques par rapport à Oy, et $U \in Oy$. On a $M = M(a)$, avec $a \neq 0$. Soit v l'ordonnée de U. On a $(UM(a)) \perp D(a)$, donc

$$\begin{aligned}
0 &= \left(a\vec{i} + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{3}{2} - v\right)\vec{j}\right).\left(\vec{i} + \frac{2a}{3}\vec{j}\right) \\
&= a + \frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3} - v\right) - a = \frac{2a}{3}\left(\frac{a^2}{3} - v\right).
\end{aligned}$$

Donc $v = \frac{a^2}{3} > 0$.



Réciproquement supposons que U a pour coordonnées $(0, v)$, avec $v > 0$. Posons $a = \sqrt{3v}$. Le calcul précédent montre que la droite $(UM(a))$ est perpendiculaire à la tangente à S en $M(a)$ et que la droite $(UM(-a))$ est perpendiculaire à la tangente à S en $M(-a)$.

Comme $U \in Oy$, et comme $M(a)$ et $M(-a)$ sont symétriques par rapport à Oy, on a $UM(a) = UM(-a)$, et le cercle de centre U et de rayon $UM(a)$ est tangent à S en $M(a)$ et $M(-a)$.

On voit donc qu'il existe un cercle de centre U tangent en deux points distincts à S si et seulement si U est un point de l'axe Oy d'ordonnée strictement positive.

Exercice II

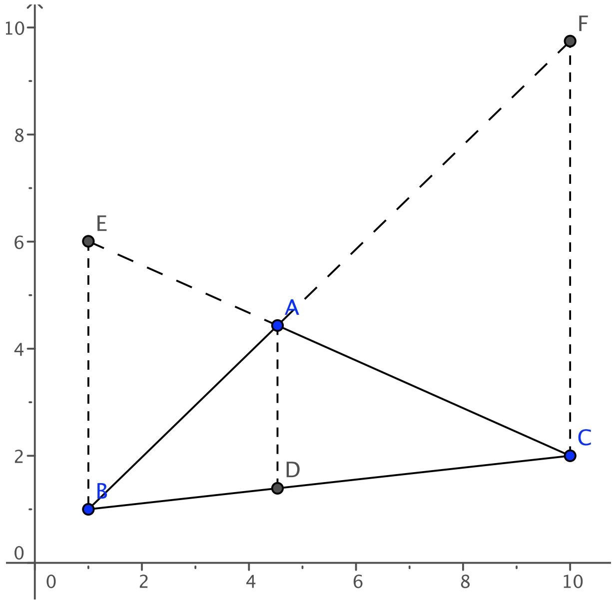
1. Soit $y = mx + p$ l'équation de $\mathscr{D}$, (a, a') (b, b') et (c, c') les cordonnées cartésiennes de A, B et C respectivement. Par hypothèse a, b et c sont distincts.L'expression de s est

$$s = f(m, p) = |ma + p - a'| + |mb + p - b'| + |mc + p - c'|.$$

Fixons m et supposons par exemple $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, où $\alpha = a' - ma$, $\beta = b' - mb$ et $\gamma = c' - mc$. La fonction $p \mapsto f(m, p)$ est continue, affine sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha]$, $[\alpha, \beta]$, $[\beta, \gamma]$ et $[\gamma, +\infty[$, avec comme pentes sur ces intervalles -3, -1, 1 et 3 respectivement. Elle atteint, dans ce cas de figure, son minimum strict en β.
On en déduit que l'on peut se limiter à étudier les droites passant par un sommet du triangle.
Supposons que la droite $\mathscr{D}$ passe par A. On a donc $p = a' - ma$ et

$$s = |m(b - a) + a' - b'| + |m(c - a) + a' - c'|.$$

s est encore continue, affine par morceaux et de pente croissante. Sa pente change aux points $\dfrac{b'-a'}{b-a}$ et $\dfrac{c'-a'}{c-a}$, pentes des côtés AB et AC, et elle atteint donc un minimum strict lorsque $\mathscr{D}$ est un côté du triangle.



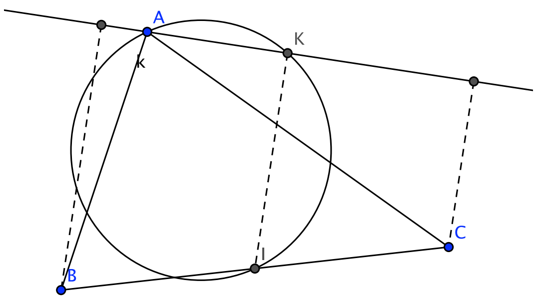
L'examen de la figure montre que le minimum absolu strict est atteint sur le côté dont les sommets ont les abscisses extrêmes.

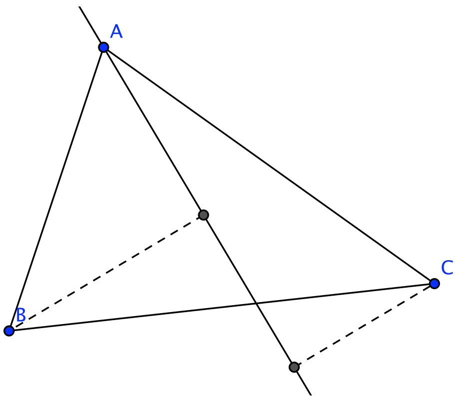
2. L'expression de s_1 est analogue :

$$s_1 = g(m,p) = \frac{|ma+p-a'|+|mb+p-b'|+|mc+p-c'|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

et le même raisonnement qu'à la question précédente montre que parmi les droites de pente donnée, un minimum absolu strict est atteint pour une droite passant par un sommet du triangle.

Considérons les droites $\mathscr{D}$ passant par A :





Lorsque $\mathscr{D}$ est extérieure au triangle, s_1 vaut deux fois la longueur IK, où I est le milieu de BC et K son projeté sur $\mathscr{D}$. K se trouve sur le cercle de diamètre IA et s_1 est minimal lorsque la droite $\mathscr{D}$ égale (AB) ou (AC).

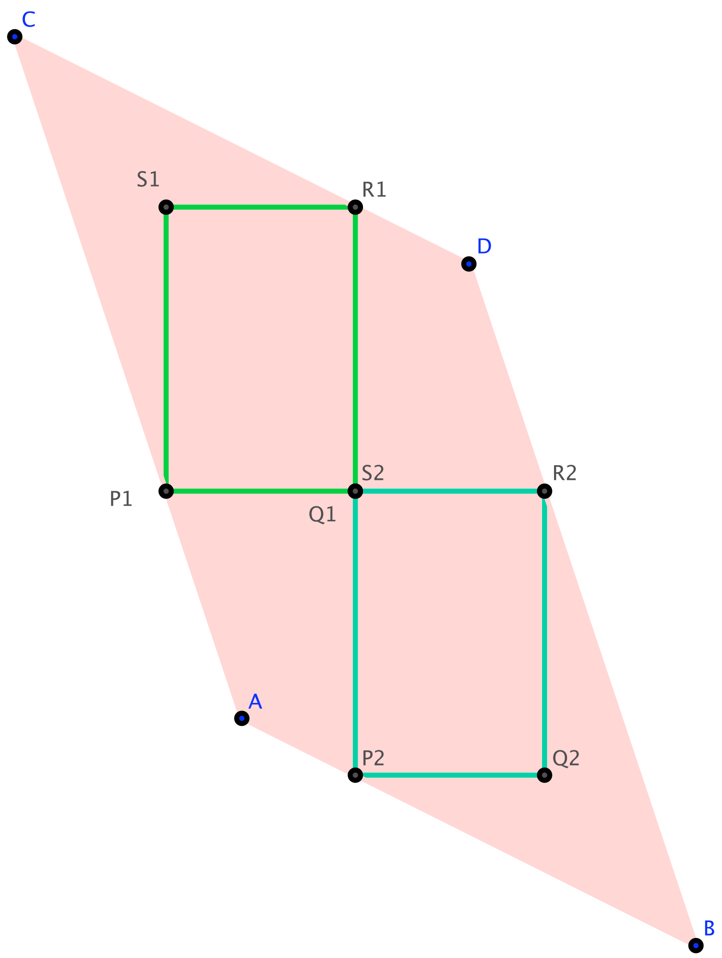
Lorsque $\mathscr{D}$ est intérieure au triangle, s_1 est la mesure de la projection orthogonale de $[BC]$ sur une direction orthogonale à $\mathscr{D}$. Elle est maximale si $\mathscr{D}$ est la hauteur issue de A (si cette dernière est intérieure au triangle) et minimale lorsque la droite $\mathscr{D}$ égale (AB) ou (AC) — en effet la fonction cos est décroissante sur $[0,\pi]$.

Le minimum de s_1 est atteint pour le côté correspondant à la hauteur la plus courte, c'est à dire le côté le plus long.

Exercice III

1. Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un réel x.

   Les deux tickets donnent les informations suivantes sur le prix r du kilo de côtelettes et le prix s du kilo de rôti :
   $$\begin{cases} \lfloor 0{,}75r \rfloor + \lfloor 0{,}25s \rfloor & = & 18 \\ \lfloor 0{,}25r \rfloor + \lfloor 0{,}50s \rfloor & = & 17 \end{cases}$$
   qui entraînent les inégalités
   $$\begin{cases} 18 & \leqslant & 0{,}75r + 0{,}25s & < & 20 \\ 17 & \leqslant & 0{,}25r + 0{,}50s & < & 19 \end{cases}$$
   Ces inégalités permettent de situer le point de coordonnées (r, s) dans le parallélogramme $ABDC$ représenté ci-dessous



   dont les sommets ont pour coordonnées $A(15{,}2, 26{,}4)$, $B(18{,}4, 24{,}8)$, $C(13{,}6, 31{,}2)$ et $D(16{,}8, 29{,}6)$. On sait en particulier que $13{,}6 \leqslant x < 18{,}4$ et $24{,}8 \leqslant y < 31{,}2$.

   - La fonction $x \longmapsto \lfloor 0{,}75x \rfloor$ change de valeur tous les multiples de $\dfrac{4}{3}$;
   - la fonction $x \longmapsto \lfloor 0{,}25x \rfloor$ change de valeur tous les multiples de 4 ;
   - la fonction $y \longmapsto \lfloor 0{,}5y \rfloor$ change de valeur tous les multiples de 2 ;

– la fonction $y \mapsto \lfloor 0{,}25y \rfloor$ change de valeur tous les multiples de 4.

Supposons $r \in \left[\dfrac{4k}{3}, \dfrac{4(k+1)}{3}\right[$ et $s \in \left[2k', 2(k'+1)\right[$, on a les tableaux :

k	10	11	12	13	14
$\lfloor 0{,}75r \rfloor$	10	11	12	13	14
$\lfloor 0{,}25r \rfloor$	3	3	4	4	4

k'	12	13	14	15
$\lfloor 0{,}25s \rfloor$	6	6	7	7
$\lfloor 0{,}50s \rfloor$	12	13	14	15

qui permettent de constater que les solutions sont données par $(k, k') = (11, 14)$ ou $(k, k') = (12, 13)$, soit $(r, s) \in \left[\dfrac{44}{3}, 16\right[\times [28, 30[\cup \left[16, \dfrac{52}{3}\right[\times [26, 28[$, ensemble représenté par les rectangles $P_1Q_1R_1S_1$ et $P_2Q_2R_2S_2$ dans la figure.

2. Supposons que les prix des produits vendus soient notés $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ (il y a un nombre fini de produits à vendre). Le ticket de caisse numéro k fournit une information du type

$$(E_k) \qquad \left\lfloor \lambda_{k,1} x_1 \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \lambda_{k,p} x_p \right\rfloor = b_k$$

équation dont le p-uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ est solution. Or, pour tout λ strictement positif, la fonction $x \mapsto \lfloor \lambda x \rfloor$ est constante sur un petit intervalle de la forme $[a_p, a_p + \varepsilon[$.

On peut alors montrer par récurrence sur k la propriété suivante : il existe $\eta_k > 0$ tel que tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ tels que $x_i \in [a_i, a_i + \eta_k[$ pour tout i, sont solutions de (E_1), (E_2), …, (E_k). En effet, en supposant η_k construit (on peut poser $\eta_0 = 1$), on considère $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p)$ tels que $\left\lfloor \lambda_{k+1,i} x \right\rfloor$ soit constant sur $[a_i, a_i + \varepsilon_i[$. Il suffit alors de poser $\eta_{k+1} = \min(\eta_k, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$.

Au final, l'ensemble des prix satisfaisant aux n tickets de la journée contient un produit d'intervalles de longueur strictement positive. Il ne sera donc possible de déterminer aucun des prix exacts des produits vendus.