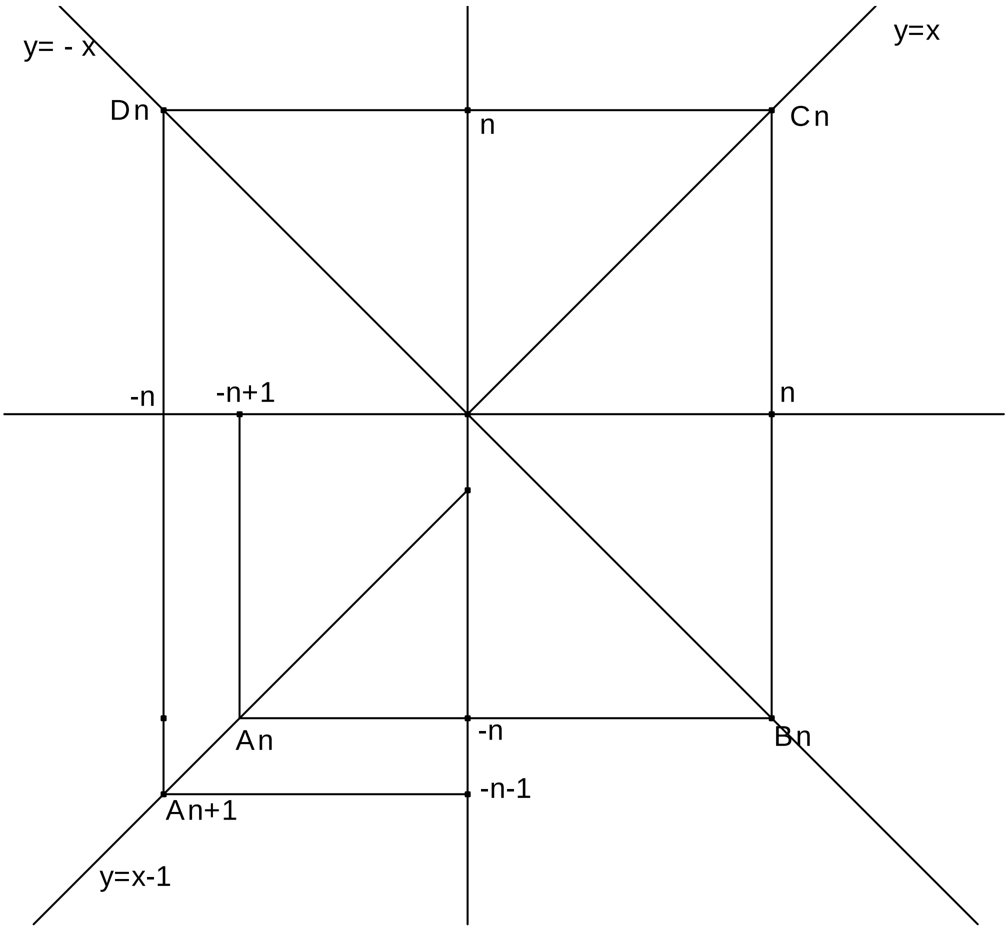
Corrigé des exercices des olympiades 2006

<u>Exercice 1 : La « spirale »</u>

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites D_1 , D_2 et D_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1$ (D_1), $y = -x$ (D_2) et $y = x$ (D_3) .

Notons A_n le point de D_1 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(-n+1, -n)$.

B_n le point de D_2 d'ordonnée $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.

C_n le point de D_3 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : (n, n).

D_n le point de D_2 d'ordonnée n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbb{N}^*$ des segments

$$\left[D_{n-1}A_n\right], \left[A_nB_n\right], \left[B_nC_n\right] \text{ et } \left[C_nD_n\right]$$

de longueurs respectives $2n-1$, $2n-1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0.

On conjecture facilement que les points A_n et C_n ont sont tels que :

$$\boxed{l(A_n) = (2n-1)^2} \quad \text{et} \quad \boxed{l(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$l(A_n) = OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_2 + \ldots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n$$
$$= 1+1+2+2+3+\ldots+(2n-2)+(2n-2)+(2n-1)$$
$$= 2.(1+2+3+\ldots+(2n-2)) + (2n-1))$$
$$= 2.\frac{(2n-2)(2n-1)}{2} + (2n-1)) = (2n-2)(2n-1)+(2n-1)$$
$$= (2n-1)((2n-2)+1) = (2n-1)^2$$

et $l(C_n) = l(A_n) + A_nB_n + B_nC_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2$

1. Il existe deux points *A* de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.
   $\boxed{1^{\text{ier}} \text{ cas : } A(5,0)}$
   Ce point est sur le segment $[B_5C_5]$;
   en effet on a $B_5(5,-5)$ et $C_5(5,5)$ avec $AC_5 = 5$.
   Ainsi $l(A) = l(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$.
   $\boxed{2^{\text{ième}} \text{ cas : } A'(-5,0)}$
   Ce point est sur le segment $[D_5A_6]$ ($D_5(-5,5)$, $A_6(-5,-6)$;) avec $A'A_6 = 6$.
   Ainsi $l(A') = l(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}$.

2. $B(2005,2006)$ est sur le segment $[C_{2006}D_{2006}]$;
   en effet on a $C_{2006}(2006,2006)$ et $D_5(-2006,2006)$ avec $C_{2006}B = 1$.
   Ainsi $l(B) = l(C_{2006}) + 1 = 4012^2 + 1 = \boxed{16\ 096\ 145}$.
3. On cherche ici le point *C* tel que $l(C) = 2006$.
   Or, la suite des nombres
   $l(O) = 0$, $l(A_1) = 1$, $l(C_1) = 4$, $l(A_2) = 9$, $l(C_2) = 16$,…,
   … $l(A_n) = (2n-1)^2$, $l(C_n) = (2n)^2$
   est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).
   Il suffit donc d'abord d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :
   $$l(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23}).$$
   De plus $C_{22}D_{22} = 44$ donc
   $$l(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = l(A_{23})$$
   donc $C \in [D_{22}A_{23}]$.

Enfin : $2006-1980=26$ donc $\begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ y_c = x_{D_{22}} - 26 = 22-26 = -4 \end{cases}$

Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22,-4)}$.

4. Soit $D(p,q)$ un point à coordonnées entières.
   Eliminons immédiatement le cas où $p=q=0$ auquel cas $D=O$.
   Notons $n = \max(|p|,|q|)$.
   $\boxed{\text{Si } n=|p|}$ alors $|q| \leqslant n$ donc $-n \leqslant q \leqslant n$ et $p \in \{-n,n\}$.
   Si $p=n$ alors $D(n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[B_nC_n]$
   car $\begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leqslant y_D \leqslant y_{C_n} = n \end{cases}$
   Si $p=-n$ alors $D(-n,q)$ avec $-n \leqslant q \leqslant n$ est sur le segment $[D_nA_{n+1}]$
   car $\begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n-1 < -n \leqslant y_D \leqslant y_{D_n} = n \end{cases}$
   $\boxed{\text{Si } n \neq |p|}$ alors $|p| < |q| = \max(|p|,|q|) = n$:
   par suite $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n,n\}$.
   Si $q=n$ alors $D(p,n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_nD_n]$
   car $\begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$
   Si $q=-n$ alors $D(p,-n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_nB_n]$
   car $\begin{cases} x_{A_n} = -n+1 \leqslant x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$
   Ainsi dans tous les cas D est sur un des segments qui constituent la spirale.

Exercice 2 : les cylindres en papier

Commençons par des considérations générales qui serviront tout au long de l'exercice.

Pour un cylindre dont la hauteur est *h*, le rayon de base *R* et la surface de base *B*, la formule donnant le volume est : $V = B \times h = \pi R^2 h$.
Pour un cercle de rayon *R*, la formule donnant le périmètre est $p = 2\pi R$.
Si le cylindre est formé à partir d'un rectangle ou d'un parallélogramme de base *a* qu'on enroulera et de hauteur *b* qui sera aussi la hauteur du cylindre, on aura :

$$a = 2\pi R \text{ d'où } R = \frac{a}{2\pi} \text{ puis } V = \pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 b \text{ soit } \boxed{V = \frac{1}{4\pi}a^2 b}.$$

1. Prenons une feuille de papier de 21 cm de large ($l = 21$) et 29,7 cm de long ($L = 29{,}7$)
   Notons $a = 21 = l$ et $b = 29{,}7 = L$.
   Selon la façon dont on roule la feuille pour obtenir un cylindre, le volume sera :

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi} L^2 l} \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l^2 L}$$

Ainsi $\frac{V_1}{V_2} = \frac{L}{l}$ et comme $L \neq l$, il en découle que $\boxed{V_1 \neq V_2}$.

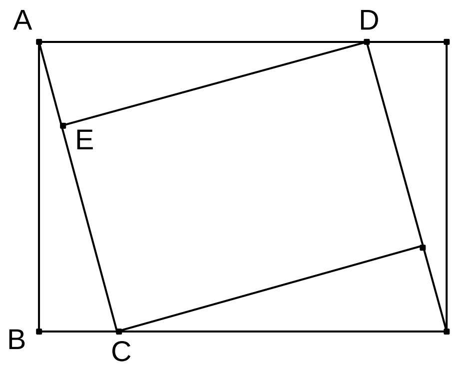
Remarquons qu'<u>il n'est pas nécessaire d'effectuer des calculs pour conclure</u>.

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure donnée dans l'énoncé. Selon la façon dont on roule la feuille on obtient deux cylindres de tailles différentes.

Pour le cylindre n°1, on a avec les notations précédentes :

$a = 29.7 - x = L - x$ et $b = 21 = l$ d'où $\boxed{V_1 = \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l}$.

Pour le cylindre n°2, on doit déjà calculer les valeurs de *a* et *b*.



Or (cf figure) :

$a = AC$ s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC. Il vient $AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + x^2$ d'où $a = AC = \sqrt{l^2 + x^2}$.

Pour calculer $b = DE = h$, remarquons que les triangles *ABC* et *DEA* sont semblables.

Il vient : $\frac{DE}{AD} = \frac{AB}{AC}$ soit $\frac{b}{L-x} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$ d'où $b = \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2 + x^2}}$

On a alors :

$V_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\sqrt{l^2 + x^2}\right)^2 \frac{l(L-x)}{\sqrt{l^2 + x^2}}$ soit $\boxed{V_2 = \frac{1}{4\pi} l(L-x)\sqrt{l^2 + x^2}}$.

Par suite :

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\pi}(L-x)^2 l = \frac{1}{4\pi} l (L-x)\sqrt{l^2 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow (L-x) = \sqrt{l^2 + x^2} \qquad \text{en simplifiant par } \frac{1}{4\pi}(L-x)l$$

$$\Leftrightarrow (L-x)^2 = l^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2 + x^2 - 2Lx = l^2 + x^2$$

$$\Leftrightarrow L^2 - 2Lx = l^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{L^2 - l^2}{2L}}$$

Numériquement on obtient $L = 29,7$ et $l = 21$: $\boxed{x \simeq 7.426}$.

soit $x \simeq \dfrac{29.7}{4} = 7.425$.

Autrement dit il suffit de choisir pour *x* à peu près le quart de la longueur de la feuille.

Le résultat peut sembler étonnant. Ce $\dfrac{1}{4}$ est-il un hasard ?

Démystifions…

En fait, le format $21 \times 29,7$ a été choisi de manière à ce qu'on puisse réduire deux feuilles de papier A4 en une seule.

Ceci est possible si $\dfrac{2l}{L} = \dfrac{L}{l}$ soit $L = l\sqrt{2}$.

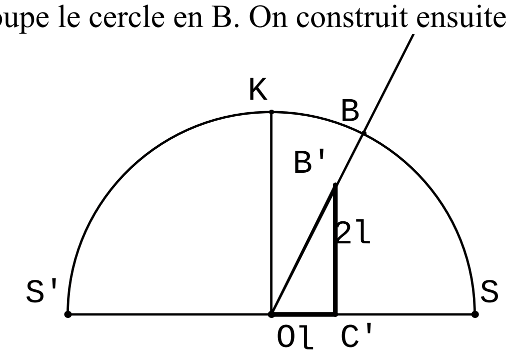
mais 29 n'est qu'une valeur approchée (certes très bonne) de $21\sqrt{2}$.

Si le format A4 était non 21×29.7 mais $21 \times 21\sqrt{2}$ (peut-être l'est-il, il faudrait demander aux papetiers…) , l'exercice donnerait pur résultat :

$$x = \frac{L^2 - l^2}{2L} = \frac{L^2 - \frac{L^2}{2}}{2L} = \frac{L^2}{4L} \text{ soit } \boxed{x = \frac{L}{4}} \qquad \text{sic….}$$

Exercice 4 : « Des carrés dans un demi cercle »

1°) On a OA = OB donc O appartient à la médiatrice de [AB] et puisque ABCD est un carré,[AB] et [CD] ont la même médiatrice, donc O est sur la médiatrice de [DC].
2°) Avec la règle et le compas, on peut construire des perpendiculaires et des bissectrices. On note S et S' les extrémités du diamètre. On construit la perpendiculaire au diamètre passant par O et on note K le point d'intersection avec le cercle.
On choisit une longueur l et on construit le segment [OC'] de longueur l sur [OS].
On construit la perpendiculaire à [OS] passant par C'. On reporte deux fois la longueur l sur la demi droit ainsi construite et on obtient un point B'. Il reste à prolonger le segment [OB']. Il coupe le cercle en B. On construit ensuite A, C et D à l'aide de perpendiculaires.



3°) Pour construire le point I, on construit la bissectrice de l'angle $\widehat{BCS}$, I est le point d'intersection avec le cercle. A l'aide de perpendiculaires, on construit ensuite H et J.
4°) a) Soit r le rayon du cercle. Pythagore dans le triangle OCB, donne : $r^2 = a^2 + a^2/4$.

Et dans le triangle OIJ, $r^2 = (b + \dfrac{a}{2})^2 + b^2$ d'où le résultat.

b) En divisant la relation précédente par b², on obtient que a/b est solution de $x^2 - x - 2 = 0$, donc a/b = 2.
c) notons c la mesure du côté du carré HGFE, et Ω le centre du carré ABCD. Le cercle de centre C et de rayon CE a donc pour rayon b + c puisque b = a/2. ; d'autre part CΩ est égal à $b\sqrt{2}$. La question est donc de savoir si $b + c = b\sqrt{2}$.
En fait, OΩHC est un carré de côté b. Donc l'angle $\widehat{COH}$ mesure 45° ; de même l'angle $\widehat{GHF}$ mesure aussi 45°. Les points O, H et F sont donc alignés.
On obtient alors : $r = (b + c)\sqrt{2}$, car OF = r ; On a aussi $r = b\sqrt{5}$ car OI = r. Donc on a finalement $b + c = b\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ et donc le point Ω n'appartient pas au cercle de centre C de rayon CE.
d) Si le rayon est 1, on obtient $a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $b = \frac{\sqrt{5}}{5}$ puis $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}$ puisque $r = (b + c)\sqrt{2}$, et enfin pour obtenir d, longueur du côté du carré MNPQ, on écrit : $ON^2 = 1 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (a+d)^2$ en utilisant Pythagore. On obtient $d = \frac{-8\sqrt{5}+2\sqrt{105}}{25}$.

Exercice 3: « Produit de chiffres ».
1°) Si n a un seul chiffre, on a P(n) = n d'où, si n est solution du problème,
$n^2 + 1002\,n - 2006 = n$, soit $n^2 + 1001\,n - 2006 = 0$. Seul le chiffre 2 est solution de cette équation ; le seul nombre ayant un seul chiffre solution du problème est 2.
2°) Si k est le nombre de chiffres de n, tous ces chiffres sont inférieurs ou égaux à 9, donc le produit de tous ces chiffres est inférieur ou égal à 9^k . D'autre part, si n a k chiffres il est compris entre 10^{k-1} et 10^k. Donc on a bien $n \geq 10^{k-1}$
3°) A partir de $n \geq 10^{k-1}$, on obtient $n^2 + 1002\,n - 2006 \geq 10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006$, d'où l'encadrement si n vérifie la propriété.
4°) Si k = 2, $10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006$ est égal à 8114, et 9^k est égal à 81, donc il est impossible de trouver un entier n de deux chiffres vérifiant l'égalité.
5°) si k > 2, le nombre $10^{2k-2} + 1002 \times 10^{k-1} - 2006$ est de plus en plus grand et est toujours plus grand que 9^k, donc il n'y a pas de solution possible si k > 2. Finalement le seul entier qui vérifie la propriété $P(n) = n^2 + 1002\times n - 2006$ est 2.