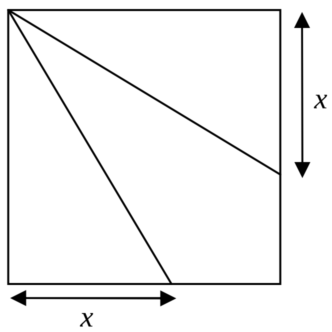
OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Bordeaux

Session de 2008
CLASSE DE PREMIÈRE
Durée : 4 heures

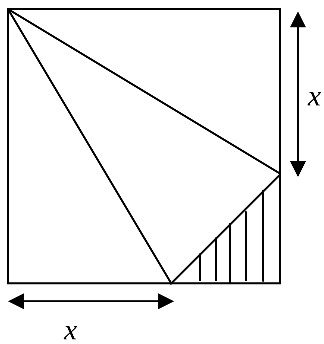
Les quatre exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 : Un partage équitable



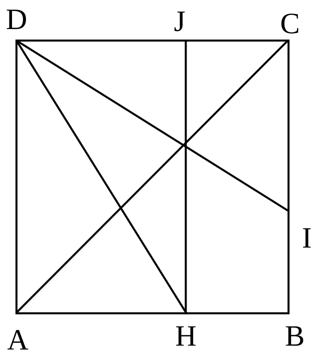
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

Exercice 2 : Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2 = 1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

$3 = 1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice 3 : Des jetons circulaires dans une boîte carrée

ABCD est un carré de côté a. Le cercle Γ_1 est tangent aux segments [AD] et [CD].

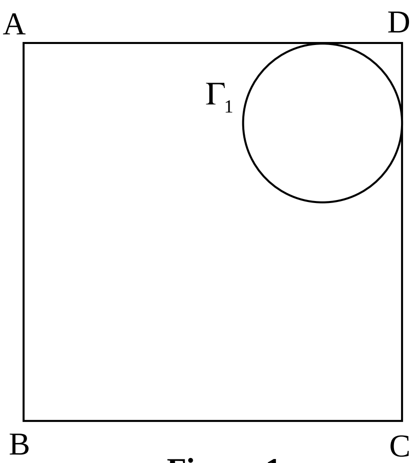


Figure 1

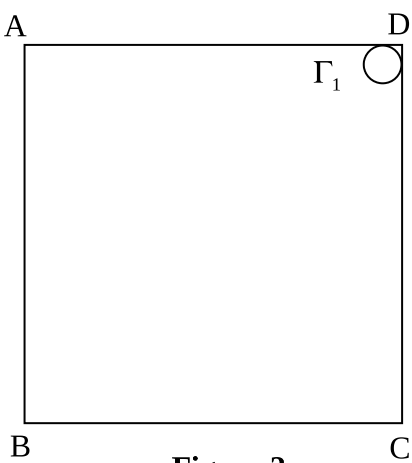


Figure 2

1. a) Reproduire la figure 1 et construire un cercle Γ_2 contenu dans le carré ABCD et tangent à la fois au cercle Γ_1 et aux segments [AB] et [BC]. On indiquera le programme de construction.

b) Expliquer pourquoi cette construction n'est pas possible sur la figure 2.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que le cercle Γ_2 est contenu dans le carré ABCD et tangent à la fois au cercle Γ_1 et aux segments [AB] et [BC]. On désigne respectivement par R_1 et R_2 les rayons des cercles Γ_1 et Γ_2.

2. **a)** Démontrer que $R_1 + R_2$ reste constant lorsque l'on fait varier les dimensions des deux cercles.

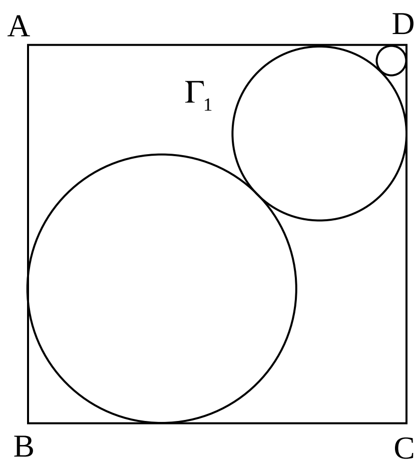
b) Quelle est la valeur minimale et la valeur maximale de R_1 ?

3. Soit S la somme des aires des disques limités par les cercles Γ_1 et Γ_2.

Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de S.

4. Le petit cercle représenté sur la figure ci-dessous est tangent au cercle Γ_1 et aux côtés [AD] et [CD].

Exprimer le rayon de ce cercle en fonction de R_1.



Exercice 4 : Les différences de deux carrés

On appelle E l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme différence des carrés de deux entiers naturels.

1. Montrer que 2008 est un élément de E (on pourra chercher deux entiers a et b, tous deux supérieurs à 200 tels que $2008 = a^2 - b^2$).

2. Montrer que tout nombre impair appartient à E.

3. Montrer que E contient tous les cubes des entiers naturels.

4. Décrire les entiers naturels qui n'appartiennent pas à l'ensemble E.

5. Donner un entier qui s'écrit comme différence des carrés de deux entiers naturels de cinq façons différentes exactement.