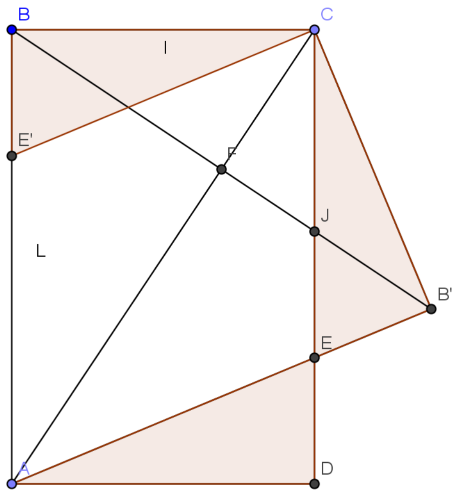
OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Bordeaux
Session de 2009

Éléments de correction

***Exercice 1* : Un pliage de Rectangle**



2- Sachant que AE'CE est un losange on a :
$(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c = 10$

3- On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$
avec $L \geq 8$
soit : $l^2 = L(15-L)$
d'où les seules réponses entières : L=12 et l=6.
Et ces deux dimensions conduisent à un losange de côté 7,5 cm.

4- Sachant que AE'CE est un losange, on a ED=E'B donc les triangles rectangles BCE' et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l'aire du rectangle.

D'où l'égalité : $(L-c)l = 0{,}25Ll$ d'où $c = 0{,}75L$

5- Le pliage correspond à une symétrie axiale d'axe (AC).
Notons B' l'image de B et E l'intersection de (AB') et (CD) (qui sont sécantes) et E' le symétrique de E (E' est sur (AB) car CBE' est un triangle rectangle image de CB'E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE'=CE et AE=AE'
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE').

***Exercice 2* : Les triangles magiques**

Partie A

1- Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2- Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :
1- Triangle 20-magique :

```
      2
    7   1
  6       9
5   3   4   8
```

2- a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\dfrac{6+45}{3} \leq S \leq \dfrac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3- Triangle 17-magique :

			1			
		8		4		
	6				9	
2		5		7		3

4- Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5- a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

b. Triangle 19-magique

			7			
		4		1		
	5				9	
3		8		6		2

6- Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

Exercice 3 : Des carrés magiques multiplicatifs

1. $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 \\ 36 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 18 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & 2^7 \\ 2^8 & 2^4 & 1 \\ 2 & 2^6 & 2^5 \end{pmatrix}$

2. $(aei)(gec)(beh)(def) = P^4 = abcdefghe^3 = P^3e^3$. Donc $e^3 = P$.

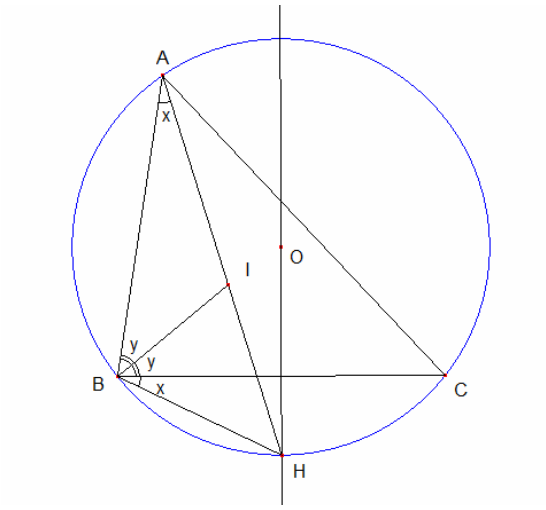
3. D(100)={1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}. Leur produit est 10^9, donc $P = 10^3$, donc 10 est au milieu.

$$\begin{pmatrix} 2 & 25 & 20 \\ 100 & 10 & 1 \\ 5 & 4 & 50 \end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & e^2 & e \\ e^2 & e & 1 \\ e & 1 & e^2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ e^2 & 1 & e \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} e & 1 & e^2 \\ e^2 & e & 1 \\ 1 & e^2 & e \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} e^2 & 1 & e \\ 1 & e & e^2 \\ e & e^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 25 \\ 25 & 5 & 1 \\ 1 & 25 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 90 & 1 & 300 \\ 100 & 30 & 9 \\ 3 & 900 & 10 \end{pmatrix}$

Exercice 4 **: Des triangles olympiadiques**



1. H étant le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$, (AH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et donc I appartient à (AH).

D'autre part, $\widehat{BIH} = 180° - \widehat{BIA} = x + y = \widehat{IBH}$.
Le triangle BIH est donc isocèle en H et HB=HI.
Si le triangle est olympiadique, I est un point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par O et du cercle de centre H passant par B.
On construit donc le point A intersection du cercle $\mathscr{C}$ avec (HI).

2. La construction est possible si et seulement si HB>HO.

Or HB>HO $\Leftrightarrow \widehat{HOB} > 60° \Leftrightarrow \alpha > 60°$, donc il existe un triangle olympiadique ABC de sommet A tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ si et seulement si $\alpha > 60°$.

Exercice 5 **: Des carrés dans un carré**

1. $S_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0,5 \\ (2x-1)^2 & \text{sinon} \end{cases}$. S_1 est représentée sur le schéma 1.

2. $S_2(x)=\begin{cases} 1-2x^2 & \text{si } x<0,5 \\ 2(x-1)^2 & \text{sinon} \end{cases}$. S_2 est représentée sur le schéma 3.

3. $S_1(x)=\dfrac{1}{4}$ pour $2x-1=\dfrac{1}{2}$, donc pour $x=\dfrac{3}{4}$.

4. $S_1(x)=S_2(x)$ pour $(2x-1)^2=2(x-1)^2$, donc pour $2x^2=1$ donc pour $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases} 1-2x^2 & \text{si } x<0,5 \\ 6x^2-8x+3 & \text{sinon} \end{cases}$. Le minimum est obtenu si $x=\dfrac{2}{3}$, il est égal à $\dfrac{1}{3}$.
