OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Bordeaux

Session de 2009
CLASSE DE PREMIÈRE
Durée : 4 heures

Les candidats de la série S doivent résoudre les exercices 1, 2, 3 et 4.

Les candidats des autres séries doivent résoudre les exercices 1, 2, 3 et 5.

Les exercices sont indépendants.
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 – Un pliage de rectangle

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

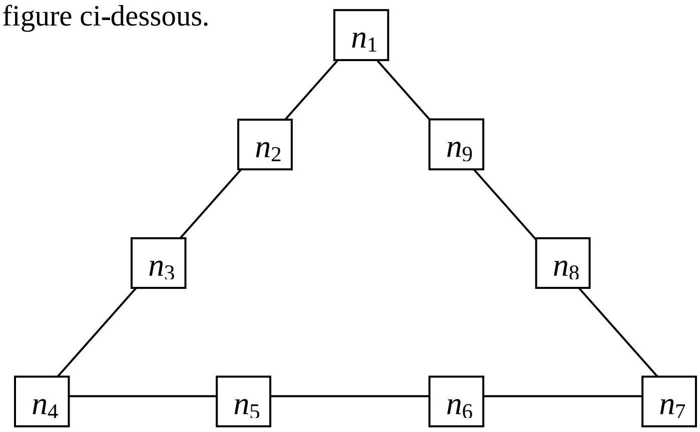
<u>Exercice 2</u> – Les triangles magiques

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

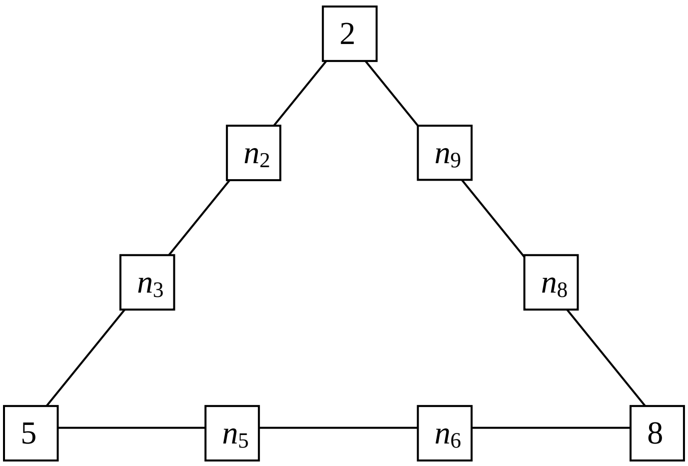


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$

c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$-magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

<u>Exercice 3</u> – Des carrés magiques multiplicatifs

a, b, c, d, e, f, g, h et *i* étant des entiers naturels non nuls n'ayant aucun diviseur autre que 1 en commun, on dit que le tableau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un carré magique multiplicatif (CMM) de produit P si et seulement si le produit des entiers de chacune des lignes, le produit des entiers de chacune des colonnes et celui des entiers de chacune des deux diagonales est égal à P.

1. Compléter les deux CMM suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & . \\ . & . & 1 \\ 3 & 4 & . \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & . \\ 2^8 & . & . \\ . & 2^6 & . \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un CMM de produit P alors $e^3 = P$.

Ce résultat, même non démontré peut être utilisé par la suite.

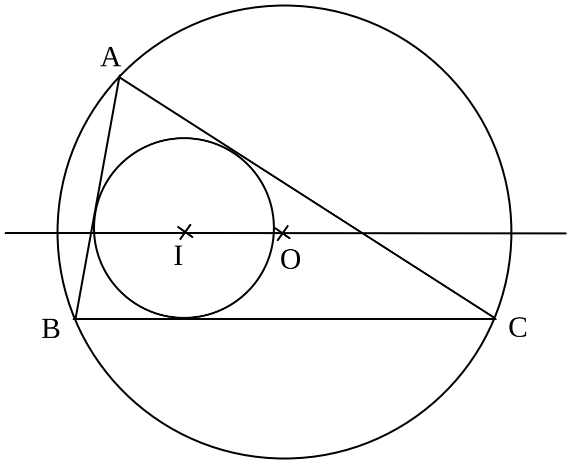
3. Construire un CMM utilisant tous les diviseurs de 100.

4. Montrer que si e est un nombre premier, alors il n'y a que quatre carrés magiques possibles comportant le nombre e au centre.

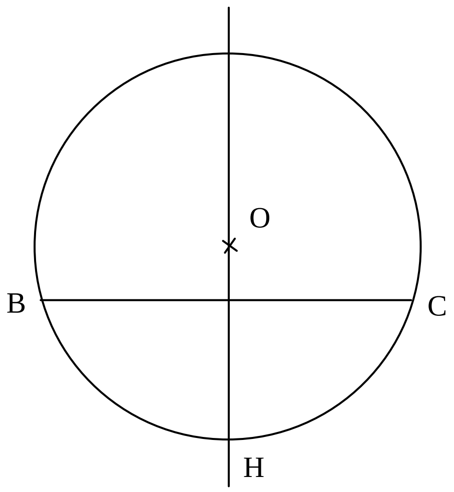
5. Construire un carré magique de produit 27 000 dont tous les termes sont différents.

<u>Exercice 4</u> – Des triangles olympiadiques

On appelle triangle olympiadique de sommet A, un triangle ABC tel que, si O et I désignent respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC, alors ces deux points sont distincts et la droite (OI) est parallèle à (BC).



1. Sur la figure ci-dessous, B et C sont deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et (OH) est la médiatrice du segment [BC].



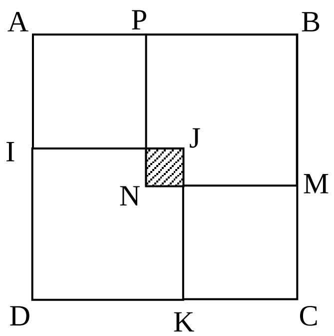
Reproduire cette figure et construire le point A du cercle $\mathscr{C}$ tel que le triangle ABC soit olympiadique de sommet A.

2. La construction précédente est-elle toujours réalisable ?
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur l'angle α pour qu'il existe un triangle olympiadique ABC de sommet A tel que $\widehat{BAC} = \alpha$.

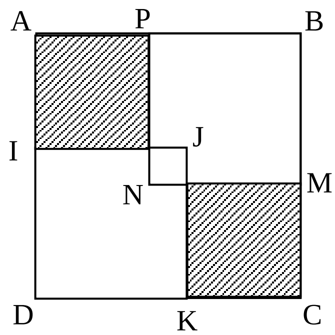
<u>Exercice 5</u> – Des carrés dans un carré.

ABCD est un carré de côté 1 et x est un nombre réel compris entre 0 et 1.
IJKD et PBMN sont deux carrés de côté x contenus dans le carré ABCD.

On désigne par $S_1(x)$ l'aire de la partie commune à ces deux carrés si elle existe et par $S_2(x)$ l'aire de la partie extérieure à ces deux carrés et contenue dans ABCD.
Si ces deux carrés n'ont pas de partie commune, on pose $S_1(x) = 0$.



Visualisation de $S_1(x)$



Visualisation de $S_2(x)$

1. Retrouver parmi les huit courbes suivantes celle qui représente la fonction S_1 et celle qui représente la fonction S_2.

On s'appliquera à justifier ses choix.

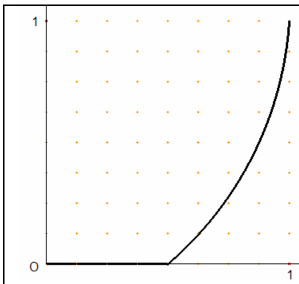


Schéma 1

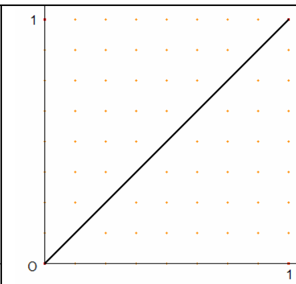


Schéma 2

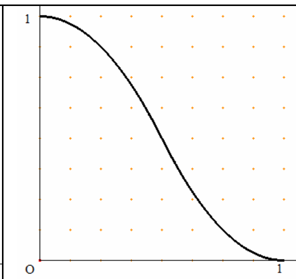


Schéma 3

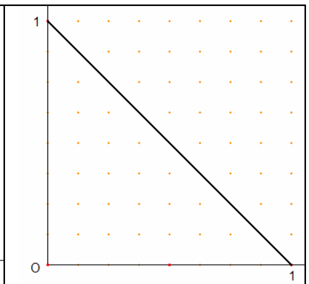


Schéma 4

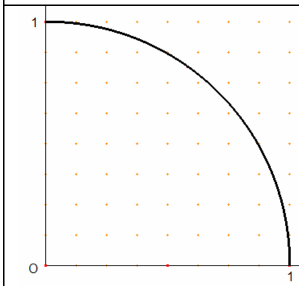


Schéma 5

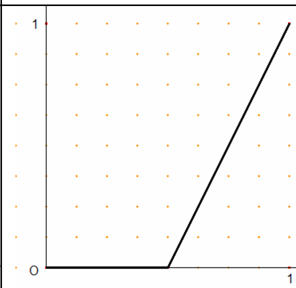


Schéma 6

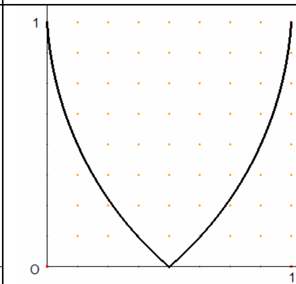


Schéma 7

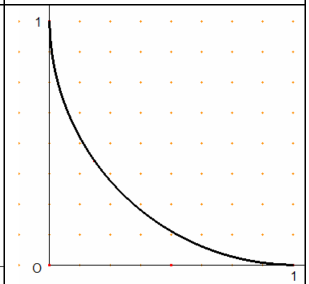


Schéma 8

2. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) = \frac{1}{4}$?
3. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) = S_2(x)$?
4. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) + S_2(x)$ minimum ? Quel est ce minimum ?