OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Bordeaux
Session de 2010

CLASSE DE PREMIÈRE
Durée : 4 heures

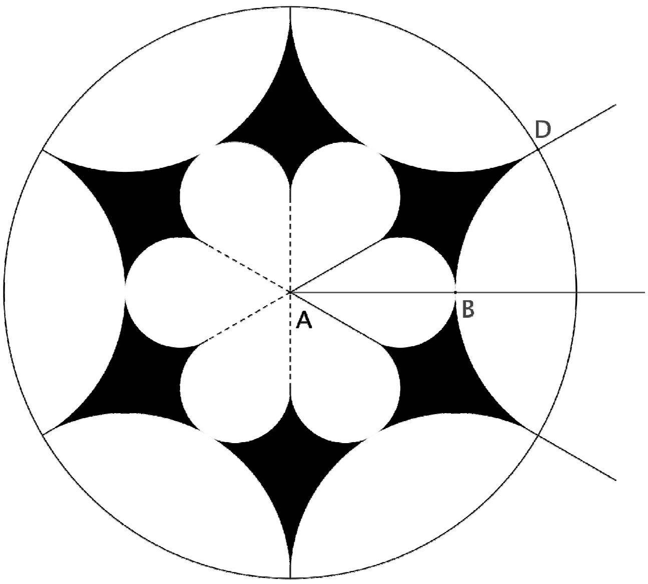
Les exercices sont indépendants. Les calculatrices sont autorisées.

Exercices nationaux pour tous

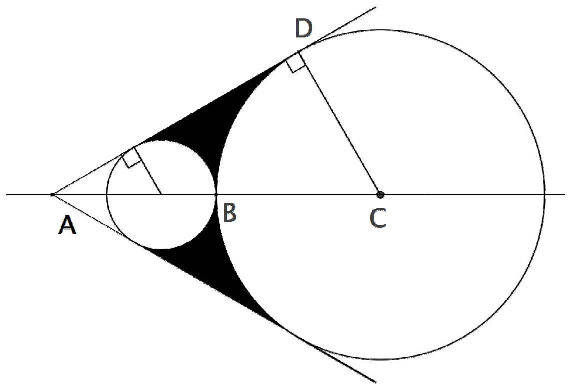
Exercice 1 : ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Exercice 2 :</u> ***A la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « a a ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercices académiques pour les candidats de la série S

Exercice 3 *(pour la série S)*

1. On considère un ensemble E du plan contenant au moins trois points et tel que les distances entre deux quelconques de ses points soient égales.
   a. Donner un exemple d'ensemble E formé de trois points.
   b. Est-ce que E peut contenir plus de trois points ? Justifier.

2. Dans cette question E est un ensemble de points de l'espace possédant la même propriété qu'à la question **1**.
   Quel est le nombre maximum de points de E ?

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathscr{C}$ un cercle donné.
   Montrer qu'il est possible de construire n points du cercle $\mathscr{C}$ tels que les distances entre deux quelconques de ces points soient toutes différentes.

Exercice 4 *(pour la série S)*

Soient a, b, c trois entiers naturels distincts et supérieurs ou égaux à 2. On forme les huit combinaisons possibles de ces trois nombres en utilisant des parenthèses, des additions ou des multiplications.
L'objectif est de trouver des familles (a, b, c) pour lesquels deux combinaisons donnent le même résultat.

1. Ecrire ces combinaisons dans chacun des cas suivants :
   a. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ ***b.*** $a = 4$, $b = 7$, $c = 8$
   c. $a = 6$, $b = 7$, $c = 8$ ***d.*** $a = 6$, $b = 11$, $c = 12$
   Sur ces exemples, quelles sont les combinaisons qui donnent le même résultat ?
   En déduire une première famille d'entiers qui répondent au problème. Le prouver.

2. On se propose de trouver d'autres familles (a, b, c) telles que $(b+c)a = bc + a$.
   a. Déterminer c lorsque $a = p$ et $b = p + 1$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   b. Déterminer b lorsque $a = 2p$ et $c = 6p - 2$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   c. En déduire deux autres familles solutions du problème initial.

3. On se propose de chercher tous les entiers naturels a, b, c supérieurs ou égaux à 2 vérifiant :

$$(S) : \begin{cases} b < c \\ (b+c)a = bc + a \\ \dfrac{c}{a} \text{ est minimum} \end{cases}$$

   a. Prouver que $a < b$.
   b. Démontrer que $\dfrac{c}{a} \geq 2$ (on pourra montrer que $\dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{c-1}{b}$).
   c. En déduire toutes les solutions de (S).

Exercices académiques pour les candidats des séries autres que la série S

Exercice 3 *(pour les séries autres que S)*

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	...						

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.
Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.
Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve.
Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5), le nombre 8 par (5, 4)

1. Comment est repéré le nombre 30 ?
2. Comment est repéré le nombre 2010 ?

Exercice 4 *(pour les séries autres que S)*

On considère la suite bâtie de la manière suivante :

$L_0 = (1)$; $L_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$; $L_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$; $L_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, …, chaque nouvelle séquence étant obtenue en recopiant la précédente et en y rajoutant les mêmes termes divisés par 2.

1. Quelle est la plus petite valeur n pour laquelle la séquence L_n contient plus de 2010 éléments ?
2. Pour cette valeur de n,
   - ***a.*** Quel est le 2010^{e} élément de L_n ?
   - ***b.*** Quelle est la somme des éléments de L_n ? On pourra commencer par calculer celles de L_1, L_2 et L_3.