Zone Europe-Afrique-Asie

Exercice national 1 : Essuie-glaces

(les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm^2 près.

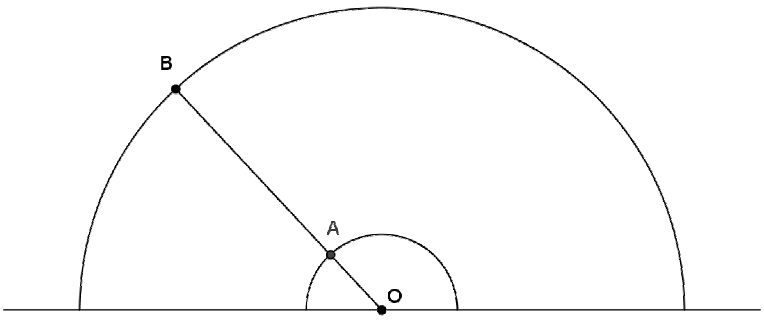


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant l'un autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

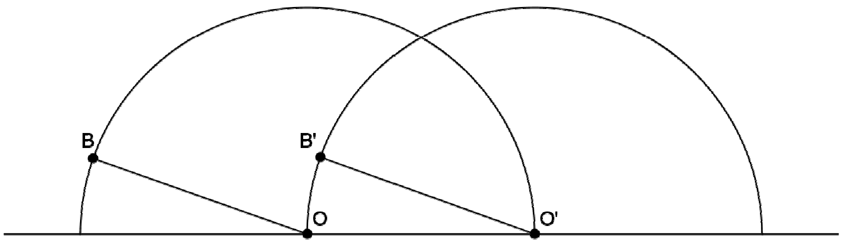


Fig. 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, CB = 4 CA et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose CA = a.

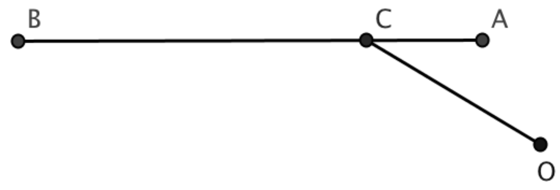


Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de a l'aire de la surface essuyée par le balai.

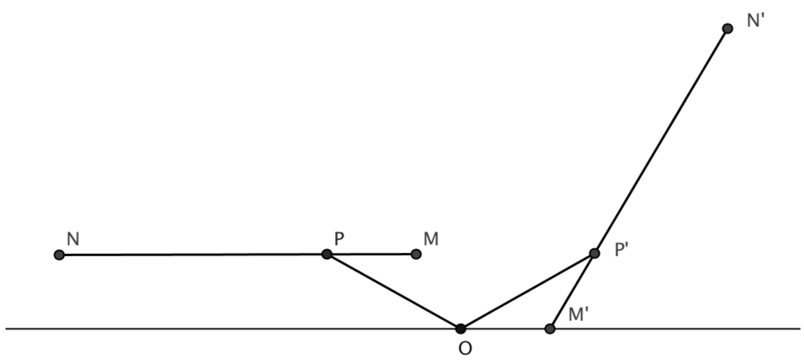
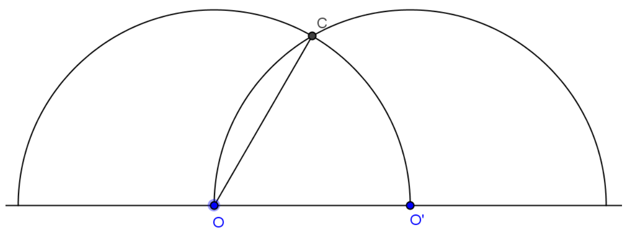


Fig. 4

Eléments de correction (proposés par l'Académie de Corse)

1) L'aire demandée en cm^2 est $\mathcal{A}=\frac{1}{2}\left(\pi.45^2-\pi.15^2\right)=\frac{\pi}{2}15^2\left(3^2-1\right)=4\pi.15^2=900\pi$ soit en valeur approchée 2827 cm^2.
2) Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons L'aire du triangle équilatéral $OO'C$ de côté de longueur R, et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$:

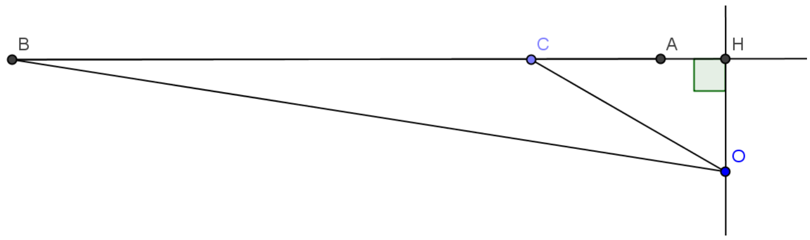
   $A_1=\frac{1}{2}\left(R\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.

   Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$: $A_2=\frac{\pi R^2}{6}$.

   Ainsi l'aire de le portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\widehat{OC}$ sera : A_2-A_1.
   L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2 - A_1 = 2A_2 - A_1$

   Donc $A_3=\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$.
   L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon R privée de A_3 soit
   $\mathcal{A}=\pi R^2-\left(\frac{\pi}{3}R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2-\right)=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2$ $\boxed{\mathcal{A}=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2}$

3)

   a) $\sin\widehat{OCH}=\sin 30°=\frac{1}{2}$ donc

   $\frac{OH}{OC}=\frac{1}{2}$ soit $OH=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

   De même $\frac{HC}{OC}=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

   donc $HC=\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3}=\frac{3}{2}a$. Enfin d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H, $OA^2=HA^2+HO^2=\left(HC-CA\right)^2+HO^2=\left(\frac{3}{2}a-a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=a^2$.

   Ainsi $OA = OC$ et donc $\boxed{\text{le triangle } AOC \text{ est isocèle.}}$

   b) L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{MOM'}$. En degré elle vaut $180-\widehat{XOM}$ avec X comme sur le dessin. Or les angles $\widehat{XOP}$ et $\widehat{OPM}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{MOX}=2\times 30=60°$. Donc l'angle géométrique $\widehat{MOM'}$ a pour mesure 180-60= $\boxed{120°.}$

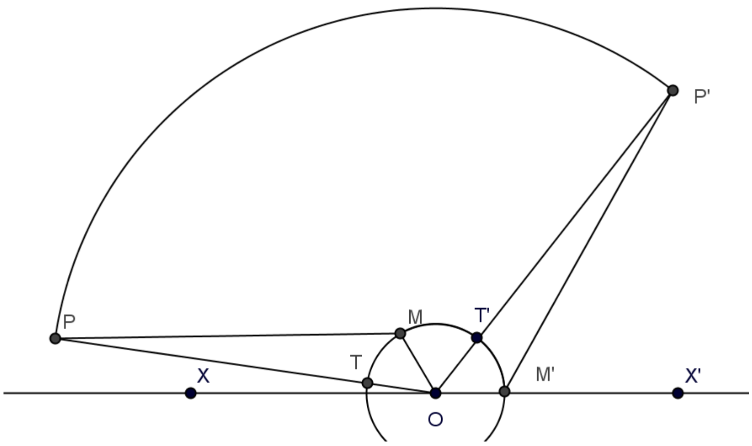
La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MP] et [M'P'] et les arcs $\overset{\frown}{MM'}$ et $\overset{\frown}{PP'}$. Soient *T* et *T'* les intersections du cercle de centre *O* passant par *M* et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points MTP ont respectivement pour images M' T' P', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [*MP*], [*PT*] et l'arc $\overset{\frown}{MT}$ a la même aire que celle limitée par [*M'P'*] [*P'T'*] et l'arc $\overset{\frown}{M'T'}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.
Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [*PT*] et [*P'T'*] et les arc de cercle $\overset{\frown}{PP'}$ et $\overset{\frown}{TT'}$.

L'aire de cette portion de plan est donc $\mathcal{A} = \frac{1}{3}\left(\pi.ON^2 - \pi.OT^2\right) = \frac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$

Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + \left(HC + CB\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc $\mathcal{A} = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi a^2$ $\boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$



Sujet S et non S

La FOURMI

(inspiré du rallye de la fête des maths –Lyon1993)

Le plan est rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Une fourmi se promène sur ce plan de la façon suivante : lorsqu'elle repart d'un point de coordonnées (x ;y) où elle était arrêtée, elle marche en ligne droite jusqu'au point de coordonnées (-3x-y ; 7x+ky) où k est un nombre entier fixé pour toute la promenade.

1°) On prend k=1

a- La fourmi part du point A(1 ;1) et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?

b- De quel point doit partir la fourmi pour arriver en trois déplacements sur le point B(16 ;0) ?

2°) Sur quel point doit se placer la fourmi pour ne pas bouger quelle que soit la valeur de k ?

3°) On prend k=2.

a- La fourmi part du point A(1 ;1) et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?

b- Est-ce que la fourmi revient toujours à son point de départ au bout de trois déplacements ?

4°) Pour quelle(s) valeur(s) de k la fourmi se retrouve t-elle à son point de départ en trois déplacements quel que soit son point de départ ?

Correction :

1.a. A(1 ;1) $\longrightarrow$ B(-4 ;8) $\longrightarrow$ C(4 ;-20) $\longrightarrow$ D(8 ;8)

b. D(16 ;0) $\longleftarrow$ C(4 ;-28) $\longleftarrow$ B(-6 ;14) $\longleftarrow$ A(2 ;0)

2. $\begin{cases} -3x-y=x \\ 7x+ky=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x \\ x(2k+9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

3. a. A(1 ;1) $\longrightarrow$ B(-4 ;9) $\longrightarrow$ C(3 ;-10) $\longrightarrow$ D(1 ;1)

b. A(x ;y) $\longrightarrow$ B(-3x-y ;7x+2y) $\longrightarrow$ C(2x+y ;-7x-3y) $\longrightarrow$ D(x ;y)

4.A(x ;y) $\longrightarrow$ B(-3x-y ;7x+ky) $\longrightarrow$ C(2x+(3-k)y ;7x(k-3)+y(k²-7)) $\longrightarrow$ D(x(-7k+15)+y(-k²+3k-2) ;7x(k²-3k+2)+y(k³-14k+21))

A=D pour toute valeur de k nécessite -7k+15=1, donc k=2 et on sait que cette condition suffit pour que A=D. 2 est donc la seule valeur répondant à la question.

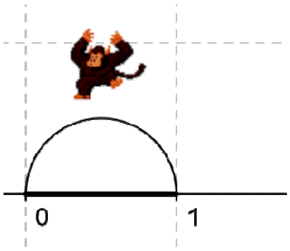
Zone Europe-Afrique-Asie

Exercice National 2 : Le singe sauteur

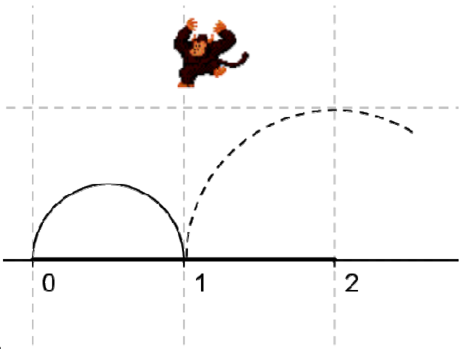
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre n est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse n en **exactement** n bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, n (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment [0 ; n].

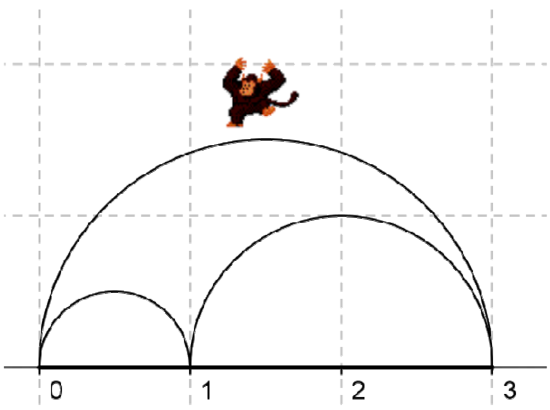
Par exemple : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle [0 ; 2].



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle [0 ; 3]) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis*.

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier *m*, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier *n* est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier *n* pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose N $\geq$ 6 et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 … Montrer que N+4 est aussi atteignable.

.**Eléments de correction (proposés par l'académie de Montpellier)**

1. Le nombre 4 est atteignable car 1+2-3+4=4.
2. Le singe n'a le choix : 1+2-3+4 et … il est bloqué !!
3. Le nombre 9 est atteignable car on a 1+2+3-4+5-6+7-8+9=9, sans jamais sortir de l'intervalle [0 ; 9].
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner 1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle [0 ; 16]. L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :

$$1+2+3+.....+n-(n+1)+(n+2)-(n+3)+(n+4)..........-(n^2-1)+n^2=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}+1+1+1+.................+1=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2-n}{2}=n^2$$

   d'où n^2 est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle [0 ; n^2].
5. Si le nombre n est atteignable, il existe des a_i valant 1 ou -1 telles que $1+2a_2+3a_3+......+(n-1)a_{n-1}=0$. Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme S_+ des termes négatifs dont on note la somme S_- . On a alors : $S_+=S_-$.
   On calcule ensuite :

$$1+2+3+.......+(n-1)=S_+-S_-=2S_+$$

   On en déduit que : $\frac{(n-1)n}{2}=2S_+$ d'où $n(n-1)=4S_+$ et donc 4 divise le produit *n(n-1).*
   Donc n est de la forme $4k$ ou $4k+1$. Par exemple 18 n'est pas atteignable.
   La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.

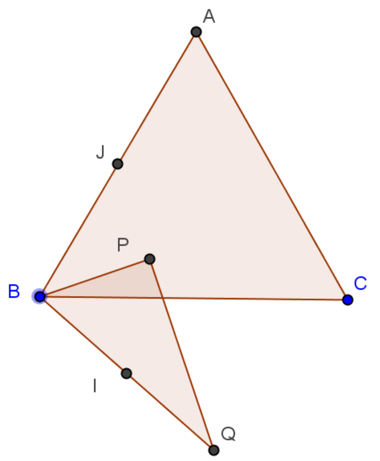
6. L'idée est de transformer une configuration de signes + - en - +, cela va ajouter 2 au nombre N. Ensuite on complète par la suite -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4) et l'on trouve N+4. On note S(i) la somme partielle des *i*-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant N se termine par -(N-1)+ N. La séquence commence par 1+2+3 et le premier signe – apparaît en position i+1. Alors S(i-1) ≥ i, car S(3) ≥ 4. On change alors la sous-séquence i-(i+1) en –i+(i+1), ce qui est possible. On ajoute la séquence -(N+1) + (N+2) – (N+3) + (N+4), ce qui assure que N+4 est atteignable.
   Question subsidiaire : est-il vrai que les nombres de la forme N=4k ou 4k+1, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Sujet S

ABC est un triangle équilatéral. On se propose de construire P intérieur au triangle tel que $PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

Première partie

On suppose que le point P placé sur la figure satisfait à ces deux conditions.



On désigne par r la rotation de centre C et d'angle 60°. Q est l'image de P par r.

1. Démontrer que le triangle BPQ est rectangle en P. En déduire que le triangle BQC est rectangle en Q, puis que le point P est sur le cercle de diamètre [AC].

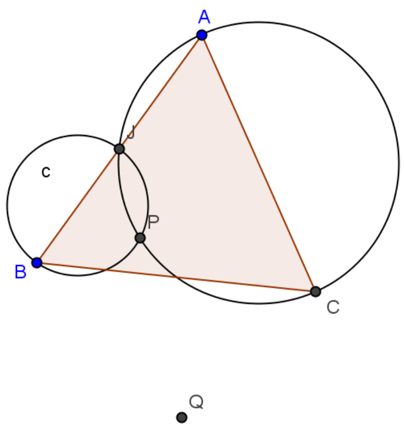
2. I est le milieu de [BQ], J celui de [AB].

a. Démontrer que le triangle PIC est rectangle en P. En déduire l'alignement des points A, P et I.

b. Justifier que P est le centre de gravité du triangle ABQ. En déduire l'alignement des points Q, P et J.
c. Justifier que le point P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

ACB triangle équilatéral. J milieu de [AB]. P le point d'intersection, autre que J, des cercles de diamètre [AC] et [BJ].



Q est l'image de P par la rotation r de centre C et d'angle 60°.
On se propose de prouver que P vérifie bien les deux conditions

$PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

1. Montrer que $\widehat{JPA}=30°$; en déduire $\widehat{BPA}$ et $\widehat{BPC}$. En déduire la nature du triangle BPQ.
2. Justifier que le triangle BQC est rectangle en Q. En déduire $\widehat{BQP}$.
3. En déduire que le point P vérifie les deux conditions requises.

Correction :

Première partie

1. r conservant les distances, AP=BQ. Or $BP^2+PQ^2=BP^2+PC^2=\frac{1}{4}PA^2+\frac{3}{4}PA^2=PA^2=BQ^2$. Le triangle BPQ est donc rectangle en P. Q est donc sur le cercle de diamètre [BC]. Par la rotation inverse de r, P est donc sur le cercle de diamètre [AC].
2. a. $PC^2+PI^2=PC^2+PB^2=PA^2$. Or par la rotation de centre B et d'angle 60°, PA=CI. On a donc $PC^2+PI^2=CI^2$.
Donc PCI est rectangle en P.
Les triangles APC et CPI étant rectangles en P, les points A, P et I sont alignés.

b. $AI=AP+PI=AP+PB=\frac{3}{2}PA$. Donc P est le centre de gravité de ABQ. P est donc sur la médiane [QJ].

c. On en déduit que BPJ est rectangle en P, donc que P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

1. $\widehat{JPA}=\widehat{ACJ}=30°$. $\widehat{BPA}=\widehat{BPJ}+\widehat{JPA}=90°+30°=120°$. $\widehat{BPC}=360°-\widehat{BPA}-\widehat{CPA}=360°-120°-90°=150°$

   $\widehat{BPQ}=\widehat{BPC}-\widehat{CPQ}=150°-60°=90°$.

2. P étant sur le cercle de diamètre [AC], par la rotation r, Q se trouve sur le cercle de diamètre [BC] et on a donc BQC rectangle en Q. $\widehat{BQP}=\widehat{BQC}-\widehat{CPQ}=90°-60°=30°$.

3. Dans le triangle rectangle BQP, $\dfrac{BP}{BQ}=\sin(30°)=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{QP}{BQ}=\cos(30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .Or BQ=PA et PQ=PC, donc

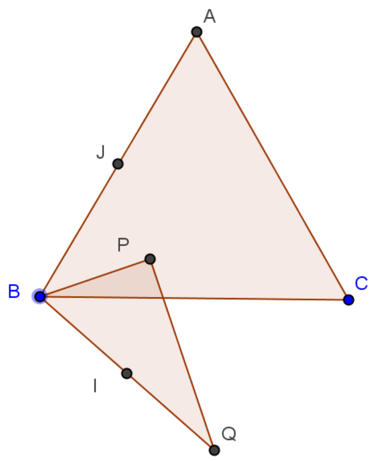
   $PB=\dfrac{1}{2}PA$ et $PC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}PA$.

Sujet S

ABC est un triangle équilatéral. On se propose de construire P intérieur au triangle tel que $PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

Première partie

On suppose que le point P placé sur la figure satisfait à ces deux conditions.



On désigne par r la rotation de centre C et d'angle 60°. Q est l'image de P par r.

1. Démontrer que le triangle BPQ est rectangle en P. En déduire que le triangle BQC est rectangle en Q, puis que le point P est sur le cercle de diamètre [AC].

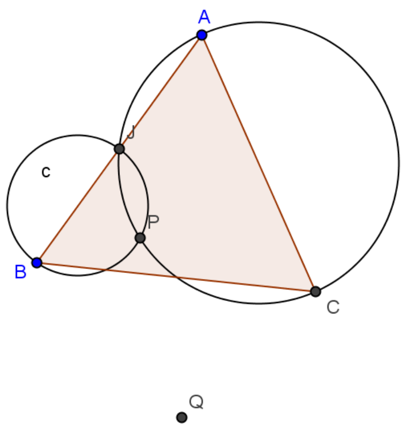
2. I est le milieu de [BQ], J celui de [AB].

a. Démontrer que le triangle PIC est rectangle en P. En déduire l'alignement des points A, P et I.

b. Justifier que P est le centre de gravité du triangle ABQ. En déduire l'alignement des points Q, P et J.
c. Justifier que le point P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

ACB triangle équilatéral. J milieu de [AB]. P le point d'intersection, autre que J, des cercles de diamètre [AC] et [BJ].



Q est l'image de P par la rotation r de centre C et d'angle 60°.
On se propose de prouver que P vérifie bien les deux conditions

$PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

1. Montrer que $\widehat{JPA}=30°$; en déduire $\widehat{BPA}$ et $\widehat{BPC}$. En déduire la nature du triangle BPQ.
2. Justifier que le triangle BQC est rectangle en Q. En déduire $\widehat{BQP}$.
3. En déduire que le point P vérifie les deux conditions requises.

Correction :

Première partie

1. r conservant les distances, AP=BQ. Or $BP^2+PQ^2=BP^2+PC^2=\frac{1}{4}PA^2+\frac{3}{4}PA^2=PA^2=BQ^2$. Le triangle BPQ est donc rectangle en P. Q est donc sur le cercle de diamètre [BC]. Par la rotation inverse de r, P est donc sur le cercle de diamètre [AC].
2. a. $PC^2+PI^2=PC^2+PB^2=PA^2$. Or par la rotation de centre B et d'angle 60°, PA=CI. On a donc $PC^2+PI^2=CI^2$.
Donc PCI est rectangle en P.
Les triangles APC et CPI étant rectangles en P, les points A, P et I sont alignés.

b. $AI=AP+PI=AP+PB=\frac{3}{2}PA$. Donc P est le centre de gravité de ABQ. P est donc sur la médiane [QJ].

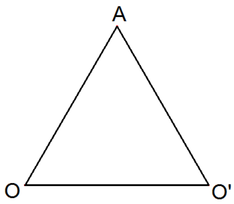
c. On en déduit que BPJ est rectangle en P, donc que P est sur le cercle de diamètre [BJ].

Deuxième partie

1. $\widehat{JPA}=\widehat{ACJ}=30°$. $\widehat{BPA}=\widehat{BPJ}+\widehat{JPA}=90°+30°=120°$. $\widehat{BPC}=360°-\widehat{BPA}-\widehat{CPA}=360°-120°-90°=150°$
   $\widehat{BPQ}=\widehat{BPC}-\widehat{CPQ}=150°-60°=90°$.
2. P étant sur le cercle de diamètre [AC], par la rotation r, Q se trouve sur le cercle de diamètre [BC] et on a donc BQC rectangle en Q. $\widehat{BQP}=\widehat{BQC}-\widehat{CPQ}=90°-60°=30°$.
3. Dans le triangle rectangle BQP, $\frac{BP}{BQ}=\sin(30°)=\frac{1}{2}$ et $\frac{QP}{BQ}=\cos(30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ .Or BQ=PA et PQ=PC, donc
   $PB=\frac{1}{2}PA$ et $PC=\frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

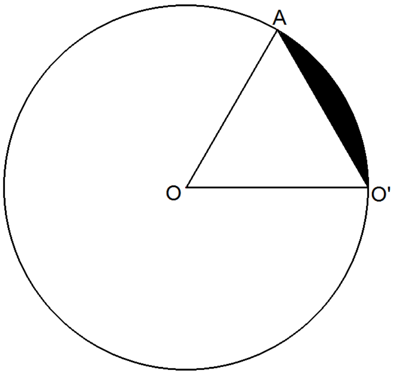
Sujet non S.

A. Calculer l’aire du triangle AOO’ équilatéral de côté 1.

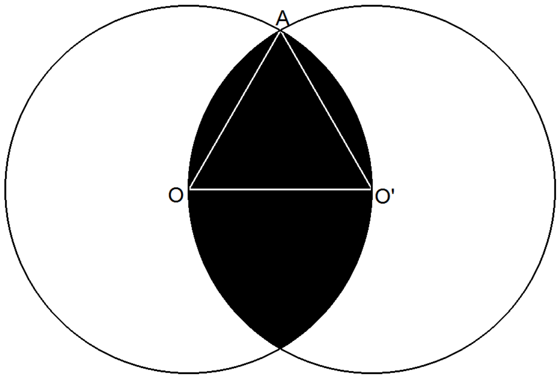


B. Calculer les aires des figures coloriées en noir. Tous les cercles ont pour rayon 1.

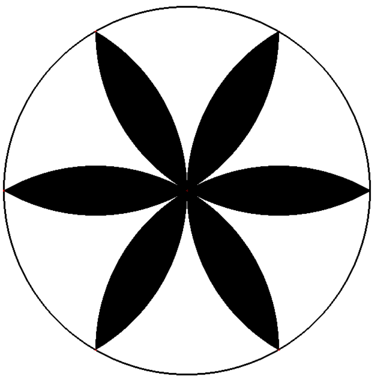
1°)



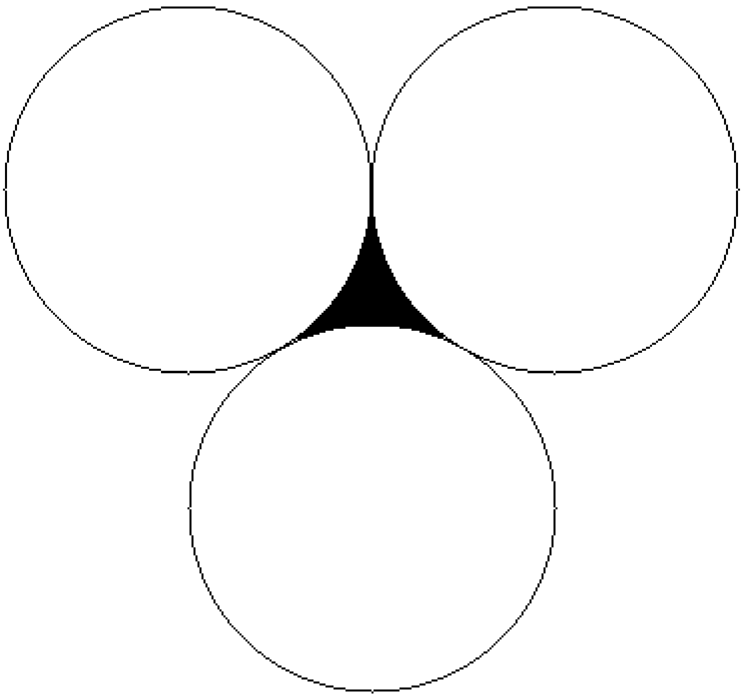
2°)



3°)



4°)



Correction :

A. $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0,43$

B. 1. $A_2 = \frac{\pi}{6} - A_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \simeq 0,09$ 2. $A_3 = 2A_1 + 4A_2 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 1,23$

3. $A_4 = 12A_2 = 2\pi - 3\sqrt{3} \simeq 1,09$ 4. $A_5 = A_1 - 3A_2 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \simeq 0,16$