Correction non S
Exercice 1
Alix a 4 points, Béa 4, Carol 20, Delphine 4, Emile 0 et Félix 8. Le capitaine a 27 ans.

Exercice 2
Pyramides multiplicatives
a)
180
12 15
4 3 5

		216						216						216		
	12		18				12		18				12		18	
4		3		6		2		6		3		6		2		9

		180						180						180						180		
	10		18				15		12				6		30				6		30	
5		2		9		5		3		4		2		3		10		3		2		15

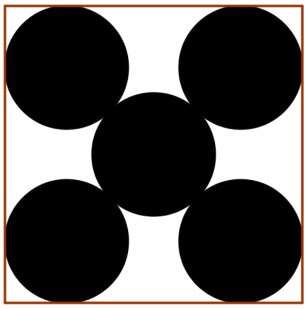
490
12 35
2 7 5

b) ab^2c
ab bc
a b c
110 :Non
120 : Oui 120 120
10 12 6 20
5 2 6 3 2 10
2. Pyramides à 4 étages
a)
486000 486000
1350 360 1350 360
45 30 12 45 30 12
3 15 2 6 9 5 6 2

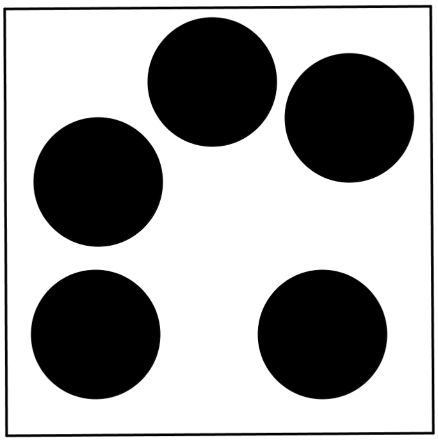
590976 590976
864 684 864 684
24 36 18 24 36 18
2 12 3 6 4 6 6 3

590976
864 684
24 36 18
6 4 9 2
b) avec 1260 :Non
3. Cette pyramide a pour base 9 , 2 , 3 , 5, 49

1. Cinq cercles de rayon 1cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré. Déterminer la longueur d'un côté du carré.



2. On se propose de déterminer la longueur du côté du plus petit carré contenant cinq cercles de rayon 1cm disjoints ou tangents extérieurement.



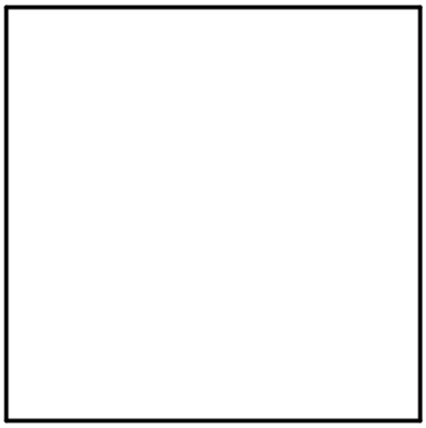


Figure 1

a. Déterminer et représenter sur la figure 1 l'ensemble D des points qui peuvent être le centre d'un cercle de rayon 1cm, ce cercle étant intérieur au carré.
b. Quel est le côté du plus petit carré contenant deux points distants de 2cm ? Justifier la réponse.
c. Quel est le côté du plus petit carré contenant cinq points distants, deux à deux, d'au moins 2cm. Justifier la réponse. (On pourra s'aider de la figure 2)

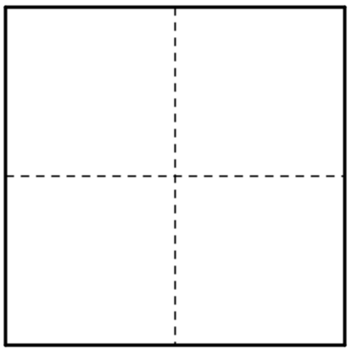


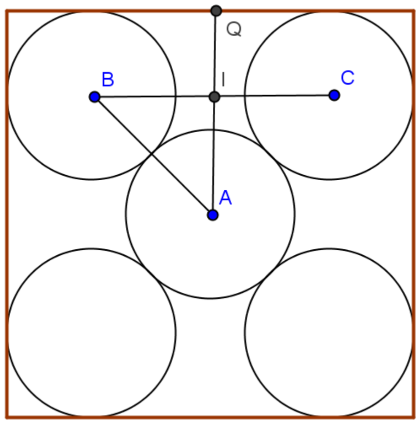
Figure 2

d. Conclure

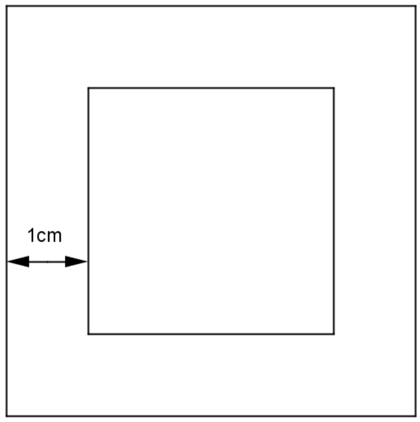
Solution :

1. AB=2, AI=$\sqrt{2}$, AQ=1+$\sqrt{2}$.

Le côté du carré est donc 2(1+$\sqrt{2}$).



2. a.

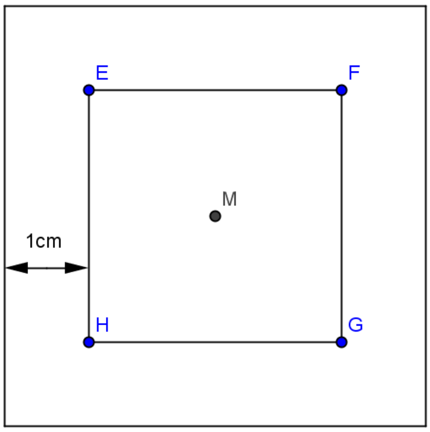


b. La plus longue distance entre 2 points d'un carré est celle entre deux sommets diagonalement opposés. Le plus petit carré contenant deux points distants de 2cm a donc sa diagonale qui mesure 2 cm et a donc un côté de $\sqrt{2}$ cm.

c. Le carré ayant été partagé en quatre, l'un des « petits » carrés contient donc au moins deux des cinq points et par conséquent mesure au moins $\sqrt{2}$ cm. Le carré intérieur mesure donc au moins 2$\sqrt{2}$ cm de côtés.

La figure ci-contre montre que la position des cinq points est possible dans le carré de côté 2$\sqrt{2}$ cm.

d. On en conclut que la configuration étudiée au 1. est celle qui répond au problème.



Pavé droit

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets (a,b,c) solutions du système $\begin{cases} a+b+c=L \\ ab+ac+bc=S \\ abc=V \end{cases}$ sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation X^3-LX^2+SX-V=0.
2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arètes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14cm^2 et dont le volume est de 3cm^3.
3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arètes est de 20cm, la somme des aires des six faces est de 14cm^2.

Solution :

1. $a^3 - La^2 + Sa - V = a^3 - (a+b+c)a^2 + S(ab+bc+ca) - abc = 0$. De même pour *b* et *c*.
2. Les dimensions de ce pavé sont les solutions de l'équation $X^3 - 5X^2 + 7X - 3 = 0$ équivalente à $(X-1)^2(X-3) = 0$. Les dimensions sont donc 1, 1 et 3.
3. Il est évident que $0 \le x \le 5$. On définit la fonction f sur $[0;5]$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$.

   $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x-1)(3x-7)$

   La fonction f posséde un minimum en $\frac{7}{3}$ égal à $\frac{49}{27}$

   et un maximum en 1 égal à 3. En dehors de l'intervalle $\left[\frac{49}{27};3\right]$

   l'équation $f(x) = \text{V}$ ne possède pas les 3 solutions requises.

x	0	1	$\frac{7}{3}$	5
f(x)	↗	3	↘ $\frac{49}{27}$	↗

La valeur maximale de V est donc 3, obtenue avec x=1, y=1 et z=3.

La valeur minimale de V est égale à $\frac{49}{27}$ obtenue pour x=y=$\frac{7}{3}$ et z=$\frac{1}{3}$

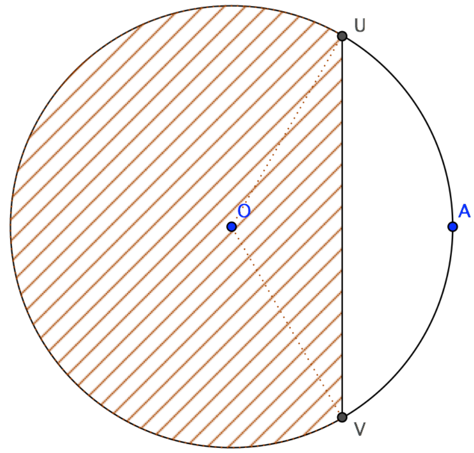
Plus proche …

Partie I

1) et 2)

On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].

On hachure … noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.



3) Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?

L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360°).

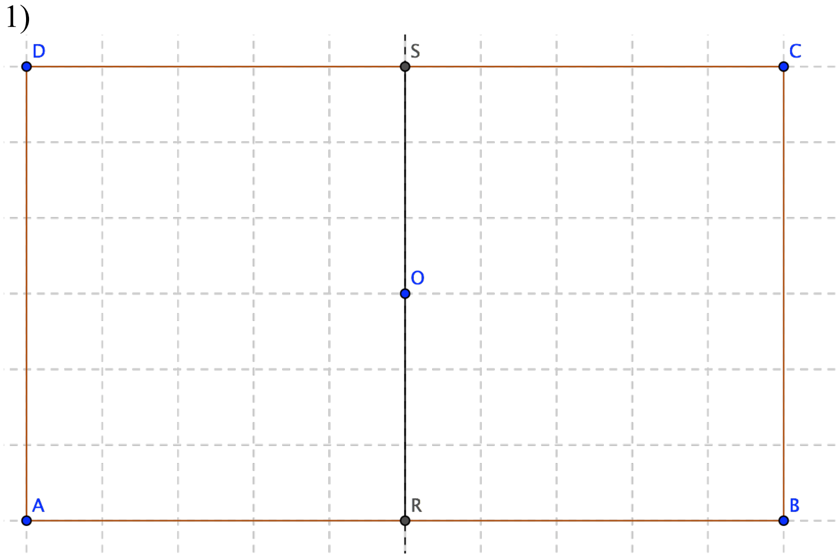
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.

L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV ; soit : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.

La probabilité : $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$; 80,5 % environ.

Partie II

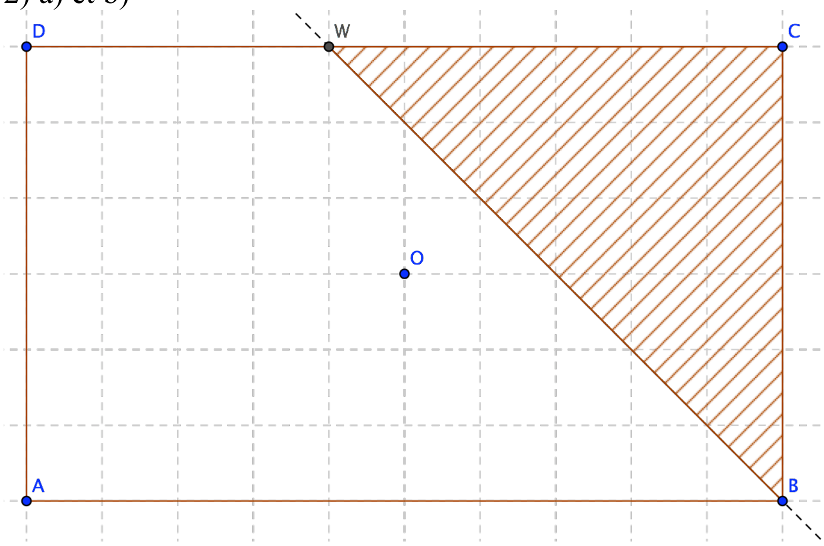
1)



La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S . Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].
Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].
Son aire est la moitié de celle du rectangle.

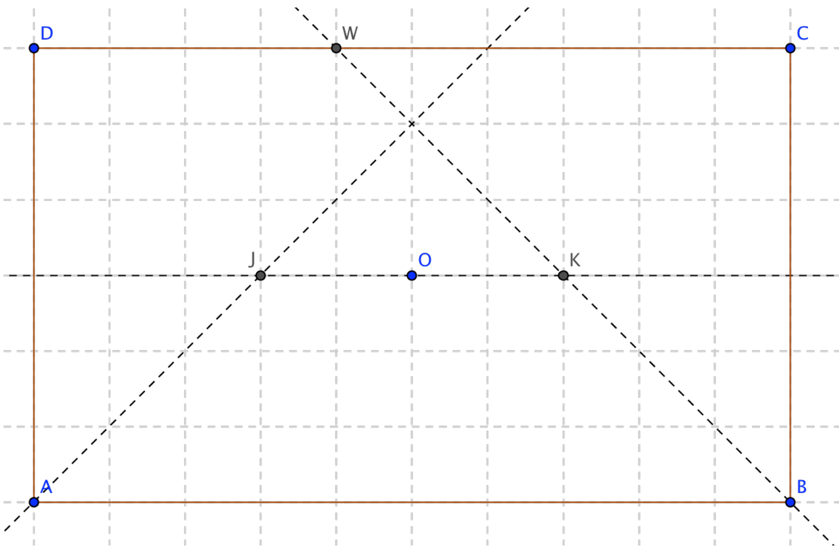
Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %.

2) a) et b)



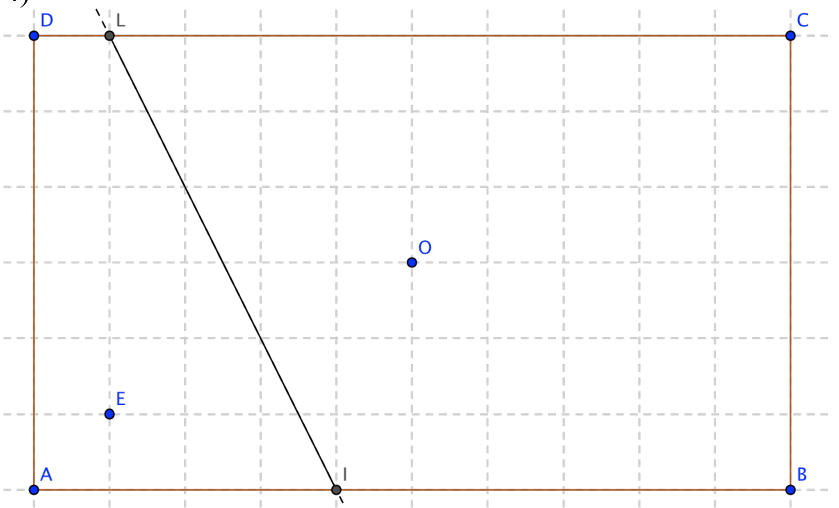
La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].
Le triangle BCW (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
Son aire : 72 cm^2.
Le rapport de celle-ci à celle du rectangle :
$\frac{3}{10}$; 30 %.

3)



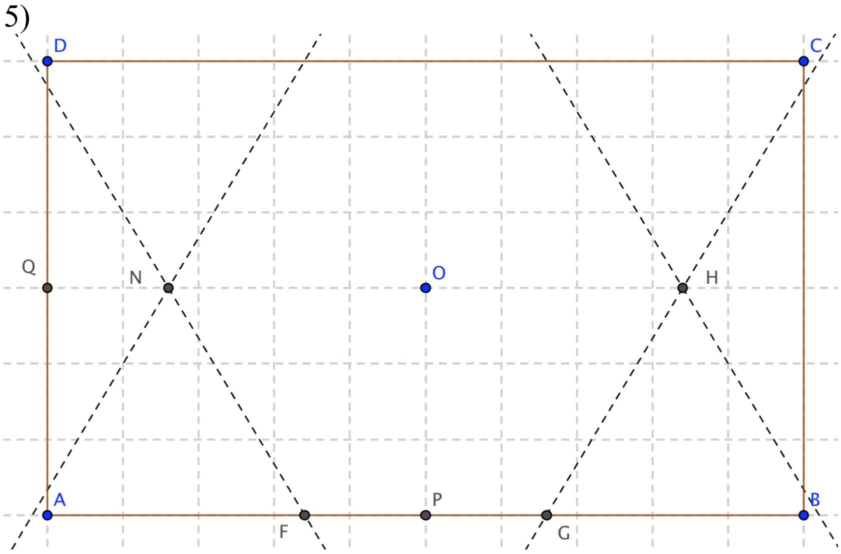
Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA].
Son aire : 84 cm^2.
Probabilité : $\frac{7}{20}$; 35 %.

4)



La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].
Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage sur l'hypoténuse EI ainsi que de même sur OI confirme que le point de [AB] à cette distance de A est équidistant de O et de E.
De même DL = 2.
L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : 60 cm^2.
La probabilité : $\frac{3}{4}$; 75 %.

5)



On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.
La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].
Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N … situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices …).
Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange).
Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).
Dans cette symétrie centrale : PFNO et NQAF se correspondent.
L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD.

Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %. Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

Digisibles

1) Essayer chiffre des dizaines, chiffre des unités :
12 ; 15 ou encore 24 ou bien 36 …

2) L'idée est d'utiliser le 1 comme chiffre des milliers. 1000 étant divisible par 2, 4, 8 … on cherche à partir des trois chiffres 2, 4, 8 ; 1248 est divisible par 8 (donc 4 ainsi que 2) convient.

3) a) Le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités et 0 ou 5 ; seul 5 est possible.
b) Avec 5 comme chiffre des unités, le nombre est impair, il n'a donc que des diviseur impairs ; tels sont les chiffres de son écriture décimale.
c) Les cinq chiffres impairs peuvent-ils figurer dans l'écriture du nombre ? Si oui, celui-ci s'écrit xyzt5 (x, y, z, t étant des chiffres impairs. Cela fait vingt-quatre nombre éventuels ; la somme des chiffres valant 25, aucun n'est divisible par 3.
c) Le nombre s'écrit xyz5 (x, y, z étant des chiffres impairs. On cherche le plus grand possible … essayer x = 9 etc … Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9735 ne convient pas ; puis 9715 non plus ; 9375 pas plus ; 9315 est digisible. C'est le plus grand s'écrivant avec un 5.

4) La somme des neuf chiffres vaut 45.
a) S'il y a le 5, l'écriture du nombre ne comporte pas plus de quatre chiffres.
S'il n'y a pas le 5, avec huit chiffres, la somme des chiffres vaut 40 ; il est impossible que le nombre soit divisible par 3.
b) Le nombre s'écrit avec sept chiffres, il n'y a donc pas le 5. Il y a le 9.
Les huit chiffres éventuels ont une somme valant 40. Quel chiffre ôter pour que cette somme soit un multiple de 9 ? Il s'agit du chiffre 4.
Un nombre digisible s'écrivant avec sept chiffres dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.
c) Pour la recherche du plus grand digisible, on tente avec le 9 … comme chiffre des centaines de mille …
Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9876321, n'est pas pair ; puis le plus grand, 9876312, n'est pas divisible par 7 ; puis 9867312 est divisible par 1, 2, 3, 7, 8, 9. C'est le plus grand nombre digisible.