

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

Académie de Bordeaux - Session de 2013

Eléments de correction

EXERCICE 1 : LES NOMBRES HARSHAD

Corrigé proposé par l'académie de Limoges

On notera dans le corrigé $s(n)$ la somme des chiffres de l'entier n .

- 1.a)** 364 est divisible par $3+6+4=13$.
- b)** 11 est le plus petit entier qui ne soit pas de Harshad.
- 2. a)** 1000 par exemple.
- b)** 10^{n-1} par exemple.
- 3. a)** 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs
- b)** 1010 ; 1011 ; 1012 sont trois nombres Harshad consécutifs.
- c)** 10...010 ; 10...011 ; 10...012 sont trois nombres Harshad consécutifs (avec autant de 0 que l'on veut).
- 4. a)** $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33 = 982080$. Sa somme de chiffres est 27.
- b)** $98208030 = 98208000 + 30$ est divisible par $s(98208030) = 27 + 3 = 30$.
idem pour les trois suivants.
- c)** 982080...030 ; etc. forment une liste de quatre Harshad consécutifs.
- 5. a)** $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33 \times 34 = 33390720$ a pour somme de chiffres 27.
3339072030 ; 3339072031 ; 3339072032 ; 3339072033 ; 3339072034 sont cinq nombres de Harshad consécutifs/
- b)** 33390720...030 ; etc. forment une liste de cinq Harshad consécutifs.
- 6 .a)** $s(p+2) = s(p) - i - 9 + (i+1) + 1 = s(p) - 7$ donc $s(p)$ et $s(p+2)$ sont de parités différentes.

 p et $p+2$ sont tous les deux impairs, donc ne sont pas divisibles par 2.
L'un de ces nombres a une somme de chiffres paire, il ne peut donc pas être Harshad.
- b)** Les couples de terminaisons incompatibles sont :
09-11 ; 19-21 ; ... ; 89-91.
Le plus grand « vide » possible est la série 90 ; 91 ; ... ; 09 ; 10 qui a une longueur 21.
Il existe donc au maximum 21 nombres Harshad consécutifs.

Remarque : le théorème de Grundman ramène ce nombre maximum à 20 (démonstration plus difficile).

Grundman a montré l'existence d'une telle liste de 20 Harshad consécutifs ; les nombres de cette liste ont 44 363 342 786 chiffres...

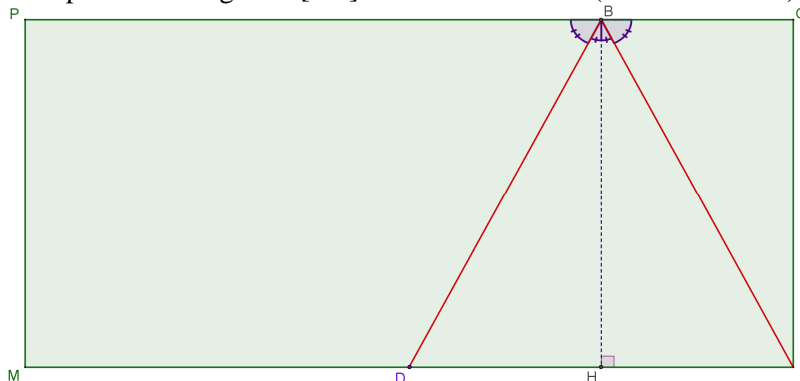
EXERCICE 2 BILLARD RECTANGULAIRE

Corrigé proposé par l'académie de Paris

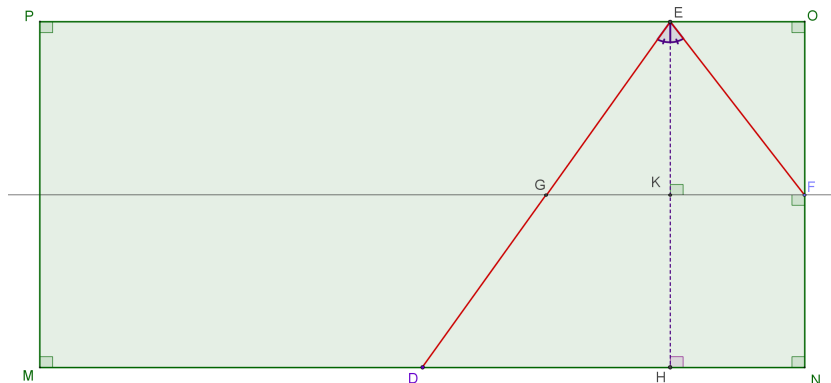
1. La bille est placée initialement en D , milieu de $[MN]$.
- a. Si on vise un point B du rail $[PO]$ et que la bille atteint N , suivant les règles de la réflexion, la perpendiculaire à $[PO]$ en B est la bissectrice de l'angle \widehat{DBN} et confondue avec la hauteur issue de B dans le triangle ABN .

Le triangle DBN est donc isocèle en B , et la droite (HN) est la médiatrice de $[DN]$
 $\left(DN = \frac{300}{2} = 150 \right)$.

Il faut donc viser le point B du segment $[PO]$ situé à 75 cm de O ($DH = HN = BO$).



- b. Quel point du rail $[PO]$ faut-il viser pour que la bille atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?



Le point E étant le point du rail $[PO]$ visé, le point F étant le milieu du rail $[NO]$ à atteindre, le point G étant le point d'intersection de la médiatrice du segment $[NO]$ et du segment $[DE]$, par les arguments précédents, on a cette fois :

$$GEF \text{ isocèle en } E \text{ et } GK = KF.$$

Par ailleurs, dans le triangle DEH , G appartient à $[DE]$, K est le milieu de $[EH]$, et $(GK) \parallel (DH)$, donc, par la réciproque du théorème des milieux, $DH = 2GK$.

$$\text{Enfin, } EO = HN = KF = GK \text{ et } DN = DH + HN, \text{ donc : } EO = \frac{DN}{3} = 50$$

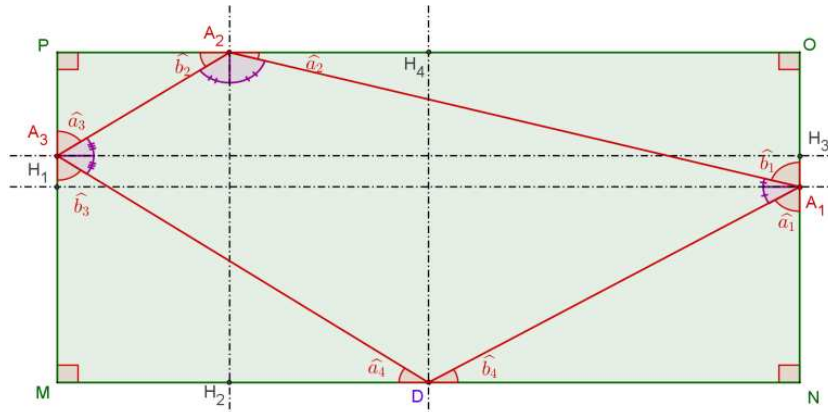
Il faut donc viser le point E du segment $[PO]$ situé à 50 cm de O .

- c. Quel point du rail $[NO]$ faut-il viser pour que la bille revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après avoir touché exactement trois rails) ?

Il est assez aisé de deviner que la ligne brisée joignant les milieux des trois rails répond à la question, on viserait donc le milieu du rail $[NO]$, puis de vérifier que cette trajectoire convient. On peut cependant montrer que c'est l'unique solution (la démonstration permettra ensuite de répondre immédiatement à la question 2.b.) :

Considérons une hypothétique trajectoire à trois bandes dans laquelle la bille part de D , touche les rails en $A_1 \in [NO]$, $A_2 \in [OP]$, $A_3 \in [PM]$ puis revient en D .

- Schéma :



Les droites en traits tiretés sont des perpendiculaires aux rails.

Par les règles de la réflexion, tous les angles d'un même couple $(\widehat{a}_i; \widehat{b}_i)$ ($1 \leq i \leq 6$) sont de même mesure car leurs complémentaires sont de même mesure.

Mais aussi en tant que couple d'angles aigus aux sommets d'un même triangle rectangle, chaque couples $(\widehat{b}_i; \widehat{a}_{i+1})$ $1 \leq i \leq 3$ est aussi un couple d'angles complémentaires. Et il en est de même pour le couple $(\widehat{b}_4; \widehat{a}_1)$.

Il s'ensuit les égalités : (1) $\widehat{b}_4 = \widehat{a}_2 = \widehat{b}_2 = \widehat{a}_4$ et $\widehat{a}_1 = \widehat{b}_1 = \widehat{a}_3 = \widehat{b}_3$.

Par ailleurs, en considérant les droites parallèles (PO) et (MN) , et la droite (DA_1) sécante à (MN) en D , et à (PO) en T , on a l'égalité des mesures des angles correspondants \widehat{b}'_4 et \widehat{b}_4 .

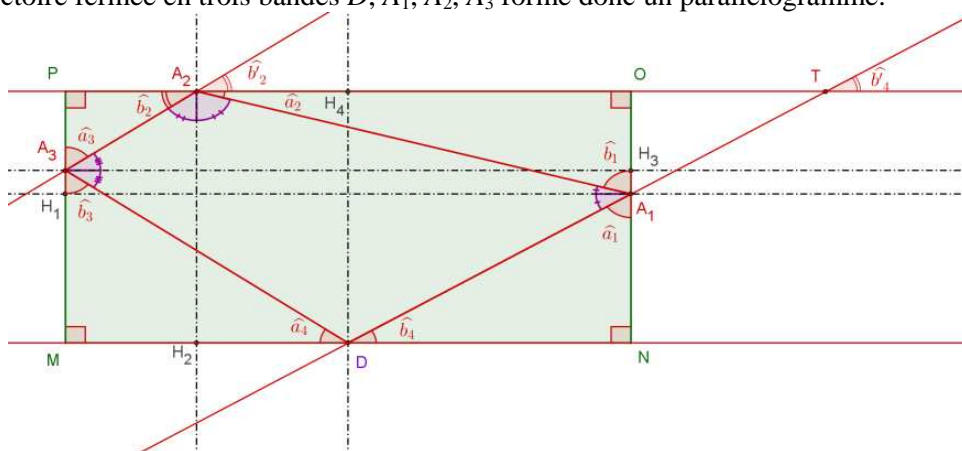
Et en considérant les droites (PO) et (A_2A_3) , on a l'égalité des mesures des angles aux sommets \widehat{b}'_2 et \widehat{b}_2 .

En combinant avec les égalités (1), il vient que $\widehat{b}'_4 = \widehat{b}'_2$, c'est-à-dire qu'on a une égalité des mesures des angles correspondants relativement aux droites (DA_1) et (A_2A_3) coupées par la sécante (PO) .

On en déduit que les côtés opposés $[DA_1]$ et $[A_2A_3]$ du quadrilatère $DA_1A_2A_3$ sont parallèles.

On montre de même que les côtés opposés $[A_1A_2]$ et $[A_3D]$ sont parallèles.

La trajectoire fermée en trois bandes D, A_1, A_2, A_3 forme donc un parallélogramme.



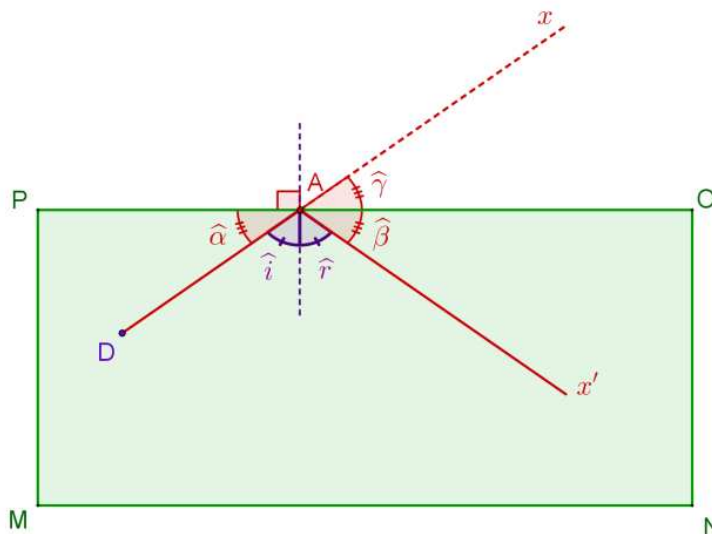
Le point D étant le milieu de $[MN]$, et les angles \widehat{a}_4 et \widehat{b}_4 ont même mesure, les triangles rectangles DNA_1 et DMA_3 sont symétriques par rapport à la médiatrice du rail $[MN]$, ce qui donne l'égalité des longueurs DA_1 et DA_3 . Le parallélogramme $DA_1A_2A_3$ est donc un losange.

Les triangles DNA_1 et A_1OA_2 étant rectangles et semblables car $\widehat{a}_1 = \widehat{b}_1$ et $\widehat{a}_2 = \widehat{b}_4$, comme aussi leurs hypoténuses sont de même longueur ($DA_1 = A_1A_2$, côtés consécutifs du losange $DA_1A_2A_3$, les côtés NA_1 et A_1O sont de même longueur.

On en conclut que le point A_1 est nécessairement le milieu du rail $[NO]$, c'est le point qu'il faut viser.

Les résultats précédents assurent que suivant les règles de la réflexion, la bille retournera en D .

2. La construction de la trajectoire de la bille au-delà d'un rebond, conformément aux règles de la réflexion peut se faire par symétrie axiale par rapport au rail heurté. Ainsi, si la bille part d'un point D et heurte un rail en A , elle poursuit sa trajectoire suivant la demi-droite $[Ax')$, symétrique de la demi-droite $[Ax]$, prolongement du segment $[DA]$:

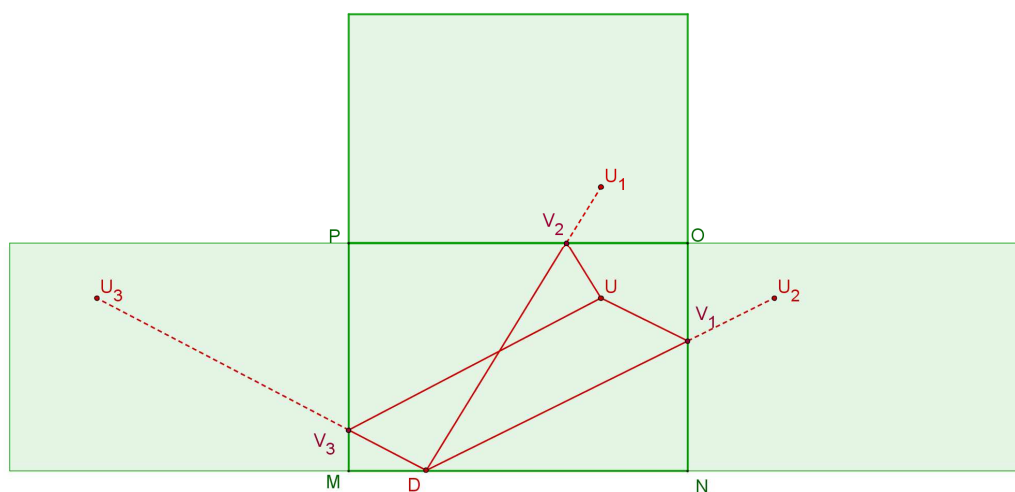


En effet, suivant les lois de la réflexion, les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, complémentaires respectifs des angles de même mesure \widehat{i} et \widehat{r} , sont encore de même mesure, tandis que les angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\gamma}$ sont de même mesure, par symétrie.

En cas de rebonds multiples, on peut, de la même façon, obtenir la trajectoire complète, en multipliant les symétries à partir du prolongement rectiligne de la trajectoire initiale.

Ceci permet de répondre aisément aux questions 1.a., 1.b. et 1.c. et plus encore aux questions 2.a. et 2.b.

- a. On note D la position initiale de la bille, et U le point à atteindre.



Sur la figure ci-dessus, où l'on a placé les points U_1, U_2, U_3 , symétriques respectifs du point U à atteindre par rapport aux rails $[NO]$, $[OP]$ et $[PM]$, atteindre le point U en une bande sur l'un de

ces rails, revient à atteindre l'un des symétriques U_1, U_2, U_3 par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel le symétrique est construit. Il y a sur cet exemple trois façons d'atteindre le point U .

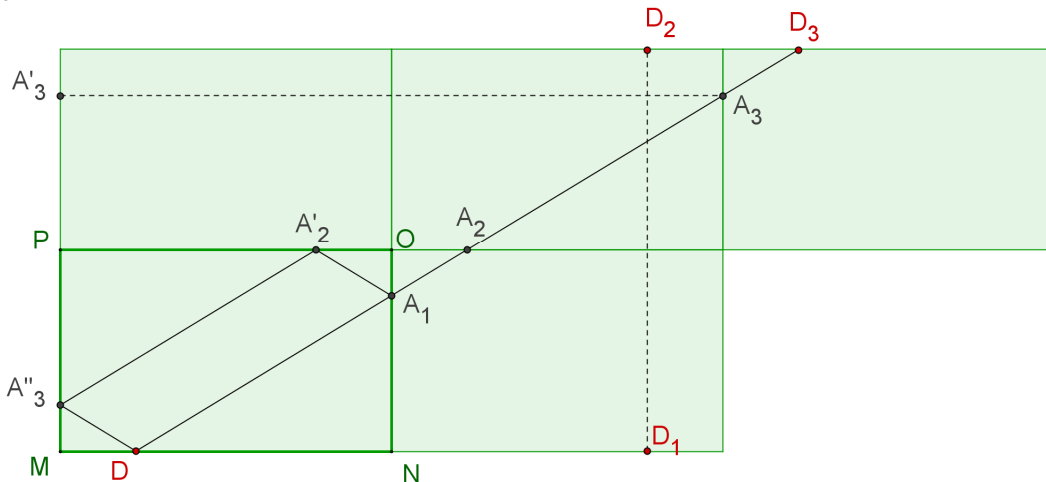
S'il s'agit de savoir si l'on peut atteindre un point quelconque du billard, on cherchera s'il est possible d'atteindre un symétrique quelconque par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel est construit le symétrique.

Où que soit situé le point D le long du rail $[MN]$, il est possible d'atteindre tout point situé sur n'importe où à l'intérieur des trois rectangles figurant les symétriques de la surface de jeu par rapport à chacun des rails $[NO], [OP]$ et $[PM]$, il est donc possible d'atteindre tout point U de la surface de jeu en une bande, et ce de trois façons possibles toujours.

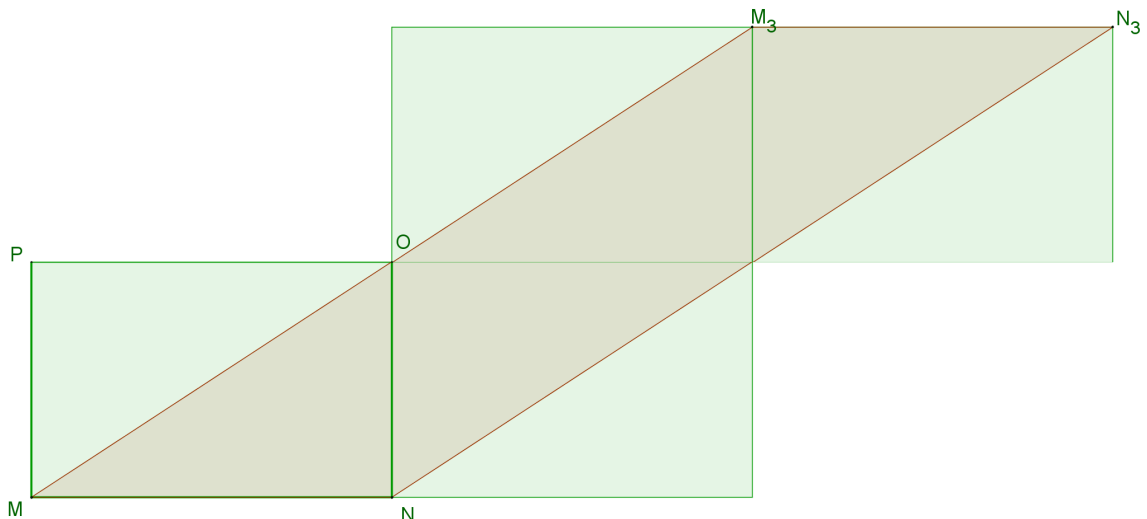
- b. On peut répondre en reprenant les résultats du 1.c. (si l'on a cherché toutes les trajectoires possibles – on reprend le résultat selon lequel la trajectoire est nécessairement un parallélogramme ; si l'on a « intuité » qu'il s'agissait au 1.b. d'un losange, ce n'est pas possible). Ci-dessous, un autre méthode.

S'il s'agit de revenir au point initial en trois bandes, on cherchera des solutions en étudiant la possibilité de trajectoires rectilignes traversant trois symétriques de la surface jeu par rapport à des rails et atteignant l'image de D par la composée de ces trois symétries.

Ci-dessous la façon de revenir en un point D du rail $[MO]$ en trois bandes avec rebonds en A_1, A_2 et A_3 :



La même construction est possible à partir de tout point D situé le long du rail $[MN]$, puisque le parallélogramme NN_3MM_3 est inclus dans la surface de jeu et les trois surfaces symétriques à considérer, et pour tout point D du rail $[MN]$, le point D_3 construit comme au-dessus par composition de trois symétries est tel que le segment $[DD_3]$ est inclus dans ce parallélogramme :



EXERCICE 3S : LA SOMME DES CHIFFRES

1. (189 ; 324) appartient à E
car $189 < 324$, $189 = 9 \times 21$ est un multiple de 9 et $[s(189)]^2 = 18^2 = 324$.
2. a) Comme b est un multiple de 9, $s(b)$ est un multiple de 9 donc il existe un entier naturel u tel que $s(b) = 9u$. On a alors $a = (s(b))^2 = 81u^2$. Comme u^2 est un entier, a est un multiple de 81.

b) Comme b s'écrit avec k chiffres, $10^{k-1} \leq b < 10^k$. De plus, $s(b) \leq 9k$ donc $a \leq 81k^2$ et comme $b < a$, on a $b < 81k^2$, d'où $10^{k-1} \leq 81k^2$, soit $\frac{10^{k-1}}{k^2} \leq 81$.

Soit la suite (u_n) définie sur \mathbf{N}^* par $u_n = \frac{10^{n-1}}{n^2}$.

Pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{10^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{10^n}{n^2} = \frac{10^n}{n^2(n+1)^2} (9n^2 - 2n - 1)$.

Comme $n \geq 1$, $n^2 \geq n$ donc $9n^2 - 2n - 1 \geq 7n - 1 \geq 7 - 1 \geq 6 > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est donc croissante.

De plus $u_k \leq 81$ et $u_5 = \frac{10^4}{25} = 400 > 81$, donc $k < 5$. Ainsi $k \leq 4$ puisque k est un entier.

Comme $a \leq 81k^2$ et $k \leq 4$, on a $a \leq 81 \times 4^2$ donc $a \leq 1296$.

3. Comme $b \geq 0$ et $b < a$, a est strictement positif.
D'après la question 2, $a = 81u^2$ et $a \leq 1296$, donc $u^2 \leq 16$ d'où $u \leq 4$. Ce qui donne 4 valeurs possibles pour u : 1, 2, 3, 4.
- Pour $u = 1$, on obtient : $a = 81$, $s(b) = 9$ et comme $b < a$, $b \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72\}$.
On obtient les couples (81, 9), (81, 18), (81, 27), (81, 36), (81, 45), (81, 54), (81, 63), (81, 72) qui conviennent tous.
 - Pour $u = 2$, on obtient : $a = 324$, $s(b) = 18$ et comme $b < a$, $b \in \{99, 189, 198, 279, 288, 297\}$
On obtient les couples (324, 99), (324, 189), (324, 198), (324, 279), (324, 288), (324, 297) qui conviennent tous.
 - Pour $u = 3$, on obtient : $a = 729$, $s(b) = 27$ et comme $b < a$, $s(b) \leq 7 + 9 + 9 = 25$. il n'y a donc pas de solution.
 - Pour $u = 4$, on obtient : $a = 1296$, $s(b) = 36$ et comme $b < a$, $s(b) \leq 1 + 9 + 9 + 9 = 28$. il n'y a donc pas de solution.

Finalement les éléments de E sont les couples : (81, 9), (81, 18), (81, 27), (81, 36), (81, 45), (81, 54), (81, 63), (81, 72), (324, 99), (324, 189), (324, 198), (324, 279), (324, 288), (324, 297).

EXERCICE 4S : DES TRIANGLES RECTANGLES DE PÉRIMÈTRE 1

1. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ appartient à F car $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1$.

$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ n'appartient pas à F car $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \neq \left(\frac{7}{12}\right)^2$.

$\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{6}\right)$ appartient à F car $1 - \frac{13}{30} - \frac{1}{6} = \frac{2}{5}$ et $\left(\frac{13}{30}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2$

2. a) Oui puisque b et a sont les mesures de deux côtés d'un triangle rectangle de périmètre 1.

b) Si RST est un triangle rectangle en S de périmètre 1, $RS + ST > RT$ donc $1 > 2 RT$ d'où

$RT < \frac{1}{2}$. L'hypoténuse étant le plus grand côté, les mesures des trois côtés sont dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. a) $c = 1 - a - b$ et $c^2 = a^2 + b^2$ donc $(1 - a - b)^2 = a^2 + b^2$ d'où $1 - 2a - 2b - 2ab = 0$.

Ainsi $1 - 2a = 2(1 - a)b$, d'où $\frac{1 - 2a}{2(1 - a)} = b$ puisque $a \neq 1$

b) $c = 1 - a - b = 1 - a - \frac{1 - 2a}{2(1 - a)} = -a + \frac{1}{2(1 - a)}$.

4. Comme $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a $x > 0$, $f(x) > 0$.

$g(x) = -x + \frac{1}{2(1-x)} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(1-x)}$ a le même signe que $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ donc

$g(x) > 0$.

De plus, $x + f(x) + g(x) = x + \frac{1 - 2x}{2(1-x)} - x + \frac{1}{2(1-x)} = \frac{2 - 2x}{2(1-x)} = 1$ et

$(g(x))^2 = \left(-x + \frac{1}{2(1-x)}\right)^2 = x^2 - \frac{x}{(1-x)} + \frac{1}{4(1-x)^2} = x^2 + \frac{1 - 4x + 4x^2}{4(1-x)^2} = x^2 + \frac{(1 - 2x)^2}{4(1-x)^2} = x^2 + (f(x))^2$

Donc $x, f(x)$ et $g(x)$ sont les mesures des trois côtés d'un triangle rectangle.

Ainsi les couples $(x, f(x))$ et $(x, g(x))$ appartiennent à F.

5. Il existe 4 couples d'ordonnée y appartenant à F si et seulement si $m < y < \frac{1}{2}$ où m est le minimum de la fonction représentée par l'arc de courbe reliant les points de coordonnées $(0 ; 0,5)$ et $(0,5 ; 0,5)$. Cette fonction est la fonction g .

Pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $g'(x) = -1 + \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1 - 2(1-x)^2}{2(1-x)^2} = \frac{-2x^2 + 4x - 1}{2(1-x)^2}$ a le même signe que le

trinôme $-2x^2 + 4x - 1$.

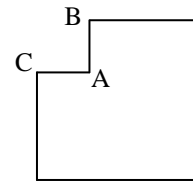
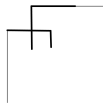
On en déduit le tableau de variation de g sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Le minimum est atteint pour

$x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ et vaut $m = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$.

Il existe 4 couples d'ordonnée y appartenant à F si et seulement si $\sqrt{2} - 1 < y < \frac{1}{2}$.

EXERCICE 3A : UN CARRÉ TRONQUÉ

1. Si on partage le polygone en n carrés de même côté c , l'un des carrés s'appuie sur le côté [AB] et un autre sur le côté [BC]. Ces deux carrés n'ont pas de partie en commun donc $c \leq 1$.



L'aire des carrés est donc inférieure ou égale à 1 cm^2 .

Comme l'aire du polygone est égale 63 cm^2 , on en déduit que $n \geq 63$.

La valeur minimale de n est 63. Elle est obtenue avec des carrés de 1 cm^2 .

2. En raisonnant de la même façon que précédemment, on en déduit que la largeur des rectangles est inférieure ou égale à 1 cm et la longueur inférieure ou égale à 7 cm . L'aire de ces rectangles est donc inférieure ou égale à 7 cm^2 . On a alors $n \geq \frac{63}{7}$ soit $n \geq 9$.

La valeur minimale de n est 9. Elle est obtenue avec des rectangles dont les côtés mesurent 1 cm et 7 cm .

3. Si le côté du triangle qui s'appuie sur le côté [AB] mesure plus d'un centimètre celui qui s'appuie sur le côté [AC] mesure au plus un centimètre et la hauteur correspondante mesure au plus 7 cm donc son aire est au plus $3,5 \text{ cm}^2$.

De même si le côté du triangle qui s'appuie sur [AB] mesure au plus 1 cm , la hauteur correspondante mesure au plus 7 cm donc son aire est au plus $3,5 \text{ cm}^2$.

On a donc $n \geq \frac{63}{3,5}$ soit $n \geq 18$.

La valeur minimale de n est 18. Elle est obtenue avec des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm et 7 cm .

Voici 3 solutions donnant les valeurs minimales de n



EXERCICE 4A : AVEC DÉDÉ...

1. a) Sur chaque dé, la somme des points des faces latérales est égale à 14 donc la somme des points des faces visibles est égale à 43.
b) Les faces visibles de chaque dé 2, 3, 4, 5 et 1 pour le dé supérieur.
Le produit est donc égal 120^3 soit 1 728 000.
c) La somme maximale est 48 avec 6 sur la face supérieure.
d) Le produit maximal est $120^3 \times 6 = 10\,368\,000$.
 2. $143 = 14 \times 10 + 3$. Il y a donc 10 dés et le nombre inscrit sur la face supérieure est 3.
 3. $135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$: un dé indique 5, trois dés indiquent 3 et les autres (s'il y en a) indiquent 1.
Comme la somme des points est égale à 18 et $5 + 3 + 3 + 3 = 14$, il y a quatre dés qui indiquent 1.
Finalement, il y a 8 dés.
-