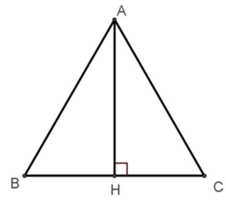
Olympiades académiques de mathématiques 2015

Académie de Bordeaux

Eléments de solution

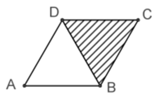
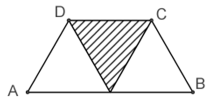
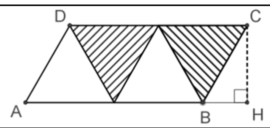
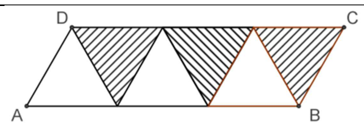
Exercice 1 : Défi entre sœurs



Partie A

1. La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés de l'angle droit du triangle AHB. D'après le théorème de Pythagore AH² = AC² − CH². AC = 1 et CH = $\frac{1}{2}$.
Donc AH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Calcul des longueurs des diagonales

			
Deux triangles	*Trois triangles*	*Quatre triangles*	*Six triangles*
La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$	Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent	Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AC] : AC² = AH² + CH² AC² = 6,25 + 0,75. D'où AC = $\sqrt{7}$. La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent.	La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). AB² = 10,5 + 0,75, d'où AB = $\sqrt{23}$

Partie B

1. Lorsque le nombre *n* de triangles est **pair**, on pose *n = 2p,* la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p+\frac{1}{2}$ et l'autre $\frac{\sqrt{3}}{2}$. $L^2 = p^2 + p + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ donne le résultat demandé.

2. Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur L.

3. Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question **1.** de cette partie, $L = \sqrt{813}$ et $l = \sqrt{757}$.

Partie C

1. Le nombre $p^2 + p$ (égal à $p(p+1)$) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair.
En revanche, 7² + 7 + 1 = 57, multiple de 3…

2. $\sqrt{2}$, racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.

3. La question est : existe-t-il un entier naturel *p* solution de l'équation $p^2 + p + 1 = 2\,015$? Cette équation s'écrit $\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\,014{,}25$ et 2 014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.

4. 1 015 056, 25 est le carré de 1 007,5. L'équation $\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 = 1\,015\,056{,}25$ a donc deux solutions, 1 007 et − 1 008. Une seule répond au problème, ce sont 2 014 triangles qu'il faut aligner pour l'obtenir.

5. Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassé dès la première différence, 0,99 à la sixième.

p	*L*(*p* + 1)	*L*(*p*)	Différence
1	2,645751311	1,732050808	0,913700503
2	3,605551275	2,645751311	0,959799964
3	4,582575695	3,605551275	0,977024419
4	5,567764363	4,582575695	0,985188668
5	6,557438524	5,567764363	0,989674161
6	7,549834435	6,557438524	0,992395911

Seule une démonstration pourra le confirmer. Calculons donc : $L(p+1) - L(p) = \sqrt{p^2 + 3p + 3} - \sqrt{p^2 + p + 1}$

Ou encore :$L(p+1) - L(p) = \frac{\left(\sqrt{p^2+3p+3}\right)^2 - \left(\sqrt{p^2+p+1}\right)^2}{\sqrt{p^2+3p+3}+\sqrt{p^2+p+1}}$

Et enfin : $L(p+1) - L(p) = \frac{2+\frac{2}{p}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{p}+\frac{3}{p^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}\right)}$

Où l'on voit que, pour les « grandes » valeurs de *p* (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

Exercice 2 : On est les rois !

Partie A

1. Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, alors $0 \leq 2x \leq 1$. Si $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, alors $0 \leq 1 - x \leq \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.

2. L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle [0, 1], l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié » sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$puis lui aussi « étiré ».

Partie B

1. Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans le tableau :

x	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0, 33	0, 66	0, 68	0, 64	0, 72	0, 56	0, 88	0, 24	0, 48	0, 96	0, 08	0, 16

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0, 33 ne se stabilisent pas (le 0, 16 prédit cependant le retour de 0, 64 et donc un cycle). À droite, les premières images engendrées par 0, 6666666 confirment cette dispersion, plus lente.

2. - La fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solutions 0 (dans l'intervalle$\left[0, \frac{1}{2}\right]$) et $\frac{2}{3}$(dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$).

- La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en découpant l'intervalle [0, 1] en quatre. L'équation $f\big(f(x)\big) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparus.

- La fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente…)

Intervalle	$\left[0, \frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{7}{8}, 1\right]$
Écriture de $f(x)$	$2x$	$2x$	$2x$	$2x$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$
Intervalle contenant $f(x)$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{3}{4}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{4}\right]$
Écriture de $f\big(f(x)\big)$	$4x$	$4x$	$2-4x$	$2-4x$	$4x-2$	$4x-2$	$4-4x$	$4-4x$
Intervalle contenant $f\big(f(x)\big)$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$	$\left[0, \frac{1}{2}\right]$
Écriture de $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$	$8x$	$2-8x$	$8x-2$	$4-8x$	$8x-4$	$6-8x$	$8x-6$	$8-8x$
Égalité à traiter	$7x = 0$	$9x = 2$	$7x = 2$	$9x = 4$	$7x = 4$	$9x = 6$	$7x = 6$	$9x = 8$
Solutions	exclu	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	exclu	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux *cycles* : $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}$ d'autre part.

0,66666666
0,66666668
0,66666664
0,66666672
0,66666656
0,66666688
0,66666624
0,66666752
0,66666496
0,66667008
0,66665984
0,66668032
0,66663936
0,66672128
0,66655744
0,66688512
0,66622976
0,66754048
0,66491904
0,67016192
0,65967616
0,68064768
0,63870464
0,72259072
0,55481856
0,89036288
0,21927424
0,43854848
0,87709695
…

3. Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle [0, 1] dont l'image par f est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2 atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$). Le nombre $\frac{2}{3}$, égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

4. Les images successives de $\frac{2\,015}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2\,015}{2\,048}$, qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1\,024}$, dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$, auquel succèdent $\frac{31}{32}, \frac{1}{16}, \frac{2}{16}$, etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0.

5. En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui-même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$, celui-ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. On se donne un entier n et un entier p non nul inférieur à 2^n, et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$. Ce sont les solutions des équations $\frac{p}{2^n} = 2x$ ou $\frac{p}{2^n} = 2(1-x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien les quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance… et 0.

Partie C

1. On introduit une variable entière N, de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction N ← N+1 (Ou toute autre forme d'incrémentation) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N. Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Le nombre 1/9 est à l'origine du cycle 2/9, 4/9, 8/9. L'algorithme tourne indéfiniment. Les images successives du nombre 1/9 subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de 1/9, qui devraient être écrites 0,222222222 ; 0,444444444 et 0,888888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de $[0,1]$ dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans $[0,1]$. (*)

0,444444656
0,888889313
0,222221375
0,444442749
0,888885498
0,222229004
0,444458008
0,888916016
0,222167969
0,444335938
0,888671875
0,22265625
0,4453125
0,890625
0,21875
0,4375
0,875

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x > 0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

(*) On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur https://interstices.info/jcms/c_36153/pourquoi-mon-ordinateur-calcule-t-il-faux ?

Exercice 3S : Prendre la tangente

1. a. Le théorème de Pythagore dans le triangle AMN, rectangle en A, donne $MN^2 = x^2 + y^2$ d'où $\mathrm{MN} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Comme $CD = CT$, le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CNT et CND donne :
   $TN^2 = CN^2 - CT^2 = CN^2 - CD^2 = DN^2$. Donc $TN = DN = 1 - AN = 1 - y$.
   De même, $TM = 1 - x$, donc $MN = TN + TM = 1 - y + 1 - x = 2 - x - y$.

   b. $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x - y$ donne $x^2 + y^2 = (2 - x - y)^2$. Après développement, élimination de $x^2 + y^2$ et simplification par 2, on obtient : $2x - 2 = y(x - 2)$.
   Comme $x \in [0,1]$, on a $x \neq 2$ et $y = \frac{2x-2}{x-2} = 2 + \frac{2}{x-2}$.
2. D'après 1, $MN = f(x)$ avec $f(x) = 2 - x - y = 2 - x - 2 - \frac{2}{x-2} = -x - \frac{2}{x-2}$.
   f est dérivable sur [0, 1] et $f'(x) = -1 + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{2-(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{(\sqrt{2}-x+2)(\sqrt{2}+x-2)}{(x-2)^2}$.
   On en déduit le tableau des variations de f sur [0,1].

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	m	$\nearrow$	1

   Le minimum de la fonction f est $m = f(2 - \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2} - \frac{2}{-\sqrt{2}} = -2 + 2\sqrt{2}$.
   MN est minimale pour $= 2 - \sqrt{2}$. Le minimum de MN est égal à $2\sqrt{2} - 2$.
3. $aire(AMN) = 1 - aire(CDNT) - aire(CBMT) = 1 - 2aire(CNT) - 2aire(CMT)$.
   Donc $aire(AMN) = 1 - 2aire(CMN) = 1 - CT \times MN = 1 - MN$.
   L'aire du triangle AMN est maximale si et seulement si la longueur MN est minimale. Elle est donc obtenue pour $x = 2 - \sqrt{2}$. Le maximum de cette aire est égal à $3 - 2\sqrt{2}$.

Exercice 3L : Décomposition en sommes

Partie A

1. Les 5 premiers entiers 2-décomposables sont : 4, 8, 12, 16, 20.
   Un entier 2-décompsable ne peut pas être impair. Il est pair comme somme deux entiers impairs.
   Les entiers deux décomposables sont de la forme$(2n-1)+(2n+1)=4n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Ce sont donc les multiples de 4 qui sont strictement positifs.
2. $S=x+(x+2)+(x+4)=3x+6=3(x+2)$ est un multiple de 3.
   L'équation $3(x+2)=2015$ n'a pas de solution entière car 2015 n'est pas un multiple de 3 donc 2015 n'est pas 3 – décomposable.
   L'équation $3(x+2)=1803$ a pour solution 599 donc $1803=599+601+603$ est 3-décomposable.

Partie B

1. $N=x+(x+2)+(x+4)+\cdots+(x+2(k-1))$
   $N=kx+2(1+2+\cdots+(k-1))=kx+(k-1)k=k(x+k-1).$
2. Si k est pair, comme x est impair, $x+k-1$ est pair et donc $N=k(x+k-1)$ est un multiple de 4 comme produit de deux entiers pairs.
3. Pour $k=13$, on a $N=13(x+12)$.
   L'équation $13(x+12)=2015$ équivaut à $x+12=155$ soit $x=143$.
   On a donc $2015=143+145+147+149+151+153+155+157+159+161+163+165+167$ est donc 13-décomposable.
4. k est un diviseur de N et $x+k-1\geq k$ donc k est un diviseur de N inférieur à $\sqrt{N}$.
   On en déduit que la seule valeur possible de k supérieur à 13 est 31.
   Pour $k=31$, on a $N=31(x+30)$.
   L'équation $31(x+30)=2015$ équivaut à $x+30=65$ soit $x=35$.
   Ainsi 2015 est 31-décomposable.

Exercice 4 : Ensembles pythagoriciens

1. Si on colorie alternativement les sommets en rouge et en bleu, on ne peut former aucun triangle rectangle dont les sommets ont la même couleur.
2. En coloriant un demi-cercle d'extrémités A et B en rouge et le demi-cercle restant en bleu, le point A étant rouge et le point B bleu, deux points diamétralement opposés sont toujours de couleurs différentes et on ne peut donc pas tracer un triangle rectangle dont les sommets sont sur le cercle et coloriés de la même couleur car deux des sommets sont nécessairement diamétralement opposés.
3. **a.** Soit H le milieu de [AB] qui est aussi le pied de la hauteur issue de C puisque le triangle ABC est équilatéral. On a $\overrightarrow{\mathrm{KM}} = \overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CH}}$. On en déduit que $(\mathrm{CH})//(\mathrm{KM})$.
   Or $(\mathrm{CH}) \perp (\mathrm{MB})$ donc $(\mathrm{KM}) \perp (\mathrm{BM})$. Le triangle BKM est rectangle en M.
   De même, les triangles AML et CLK sont rectangles en L et K respectivement.
   b. Les trois points K, L, M ne peuvent pas être de couleurs toutes différentes puisqu'on n'utilise que 2 couleurs. Deux au moins des points K, L, M sont donc de la même couleur.
   c. On suppose que $\mathscr{F}$ n'est pas pythagoricien.
   K et L étant rouges, tous les points du segment [BC] sont bleus sauf K.
   Le milieu I de [BC] est donc bleu ainsi que B donc A est rouge.
   A et L sont rouges donc M est bleu.
   Soit J le projeté orthogonal de M sur [BC]. Les sommets du triangle rectangle BMJ sont bleus, ce qui contredit le fait que $\mathscr{F}$ n'est pas pythagoricien.
   $\mathscr{F}$ est donc pythagoricien
4. **a.** Supposons que l'ensemble des 8 points A, B, C, D, E, F, G, H ne soit pas pythagoricien.
   Il est impossible que A et E soient de la même couleur sinon D, H, G serait de la même couleur (différente de celle de A), ce qui est contraire à l'hypothèse.
   De même, il est impossible que B et E soient de la même couleur.
   Donc A et B sont de la même couleur.
   De même, A et D sont de la même couleur.
   Ainsi A, B, D sont de la même couleur, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   L'ensemble des 8 points A, B, C, D, E, F, G, H est donc pythagoricien.
   b. L'ensemble des points du contour d'un rectangle est pythagoricien puisqu'il contient un ensemble pythagoricien.