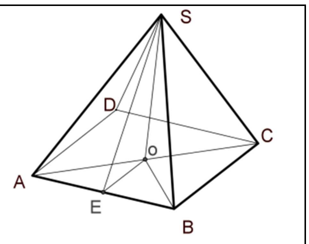
Olympiades académiques de mathématiques – Session 2016

Académie de Bordeaux

Solution des exercices nationaux

Échanges thermiques

1. ***a. b. c.*** Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a, de hauteur a	
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2(\sqrt{5}+1)$	
Volume	a^3	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$	Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur SE, qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3(\sqrt{5}+1)}{a}$	

d. Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé. Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.
2. ***a.*** On développe le second membre…
b. Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.
c. L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a, b, c), s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques…
d.et ***e.*** Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy+yz+zx)$, d'où le résultat. Comme $xyz=1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geq 6$. Et comme ce minorant est atteint en (1, 1, 1), c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 de le réalise : l'inégalité **2.** ***b.*** serait stricte.

3. ***a.*** Faire $c=1$ pour obtenir l'équation proposée.
b. Comme $p \leq q \leq r$, la somme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leq 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.
c. et ***d.*** Comme précédemment, si $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{6}, \frac{2}{q} \geq \frac{1}{6}$. D'autres majorations s'imposent dans les cas qui suivent.
Tableau final. On lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	6
$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	6	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8		6

Liber abaci

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$

2. ***a.***

k	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{pn - q}$	$\boldsymbol{qn}$
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1 233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b. À l'issue du *N*-ième tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k} = \frac{1}{(n_k - 1)n_k} \leq \frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c. On a $p_k n_k - q_k = p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$, et donc $p_{k+1} - p_k = p_k(n_k - 1) - q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain *N* pour lequel $p_N = 0$. L'algorithme s'arrête.

3. ***a.*** Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q} \geq 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.

b. Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a + 1 < 2a$ dès que $a > 1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la sommes précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+2} + \frac{1}{2a+3} + \cdots + \frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a.

c. $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite). Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. Bien sûr $b > 2a$, question précédente (inégalité de gauche).

d. Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q} = n + \frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0. Si on écrit $n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).

Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question ***c.*** en prenant pour premier dénominateur $a + 1$ un nombre supérieur à N_0. On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b + 1$.

Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1…

Demi-tour !

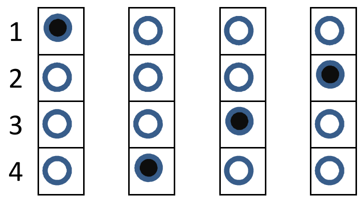
1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion *M* et l'autre le pion *N*. Supposons *N* < *M*. On commence par retourner le pion *M*. Tous les pions de numéro inférieur ou égal à *M* changent de couleur. On retourne le pion *N* et tous les pions de numéro inférieur ou égal à *N* changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre *N* +1 et *M* ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.

2. Deux opérations identiques s'annihilent.

3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2

4. ***a.*** et ***b.*** Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir). Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.

5. ***a.*** On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n, est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.
b. Dans le plateau ci-contre, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. Jeu à deux dimensions
On peut appliquer la méthode de la question **4.** colonne par colonne, en commençant par la colonne n. Cela garantit le blanchiment de la colonne n. On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n-1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.

7. Trois dimensions
Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la *couche*, j le numéro de la *tranche* (compté de gauche à droite), k le numéro du *rang* (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k), on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i, j, k.

Solutions des exercices académiques

Coloriage

1.

a. En coloriant en vert les points correspondant à 1, 2, 4 et 8, toutes les distances sont différentes.

b. $N = 12$ donc il ne peut y avoir que 6 distances possibles entre des points distincts : les entiers de 1 à 6. Lorsqu'on a 5 points, cela donne 10 paires possibles donc 10 distances. Nécessairement deux au moins d'entre elles sont égales. Il est donc impossible de colorier 5 points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points soient différentes.

2. Il est nécessaire que $N \geq 16$. Les distances entre les paires de points sont alors 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 si $N \geq 24$ ou $N - 12$ sinon, 7, 14 si $N \geq 28$ ou $N - 14$ sinon, 15 si $N \geq 30$ ou $N - 15$ sinon.

Pour $N = 24$, toutes les distances sont différentes donc $N \leq 24$.

Si $N < 24$, les distances sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, $N - 12$, $N - 14$ et $N - 15$. On doit donc avoir $N - 15 \geq 5$ donc $N \geq 20$.

Pour $N = 20$, $N - 12 = 8$ et il y a donc deux distances égales à 8.

Pour $N = 21$, $N - 14 = 7$ et il y a donc deux distances égales à 7.

Pour $N = 22$, $N - 15 = 7$ et il y a donc deux distances égales à 7.

Pour $N = 23$, $N - 15 = 8$ et il y a donc deux distances égales à 8.

Finalement la plus petite valeur possible de N est donc 24.

3.

a. 5 points donnent 10 paires de points. Pour que les 10 distances soient différentes, il est donc nécessaire que $N \geq 2 \times 10$ soit $N \geq 20$.

b. La distance entre a et b est égale à $|a - b|$ ou $N - |a - b|$. Si N est pair, ces deux entiers ont la même parité que $a - b$.

Avec 5 points coloriés, on a trois possibilités :

(1) Les 5 nombres ont la même parité. Les 10 distances sont alors paires.

(2) Parmi les 5 nombres, il y en a 4 d'une certaine parité et 1 de l'autre. Dans ce cas, parmi les 10 distances, 4 exactement sont impaires.

(3) Parmi les 5 nombres, il y en a 3 d'une certaine parité et 2 de l'autre. Dans ce cas, parmi les 10 distances, 6 exactement sont impaires.

Pour $N = 20$, les 10 distances différentes ne pourraient être que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et il y aurait donc exactement 5 distances impaires. C'est donc en contradiction avec les résultats précédents. Ainsi $N \neq 20$.

c. La valeur minimale de N est 21. En coloriant les points 1, 4, 5, 10 et 12, les distances sont 3, 1, 5, 2, 4, 6, 7, 9, 8 et 10. Elles sont toutes différentes.

4. Pour $N = 2016$, en coloriant les points correspondant aux puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024) on obtient 11 points ayant la propriété souhaitée.

La tombola

1. 100 est perdant car il n'est pas divisible par 3 et n'a donc pas été effacé.

300 est gagnant car il a été effacé puisque c'est le triple de 100 qui n'a pas été effacé.

$2016 = 3 \times 672$ et $672 = 3 \times 224$. Comme 224 n'est pas un multiple de 3, il n'a pas été effacé, donc 672 a été effacé et 2016 n'a pas été effacé. 2016 est donc perdant.

2. Si a est perdant, a n'a pas été effacé donc $3a$ est effacé et $9a$ ne l'est pas donc $9a$ est perdant.

$729 = 9 \times 81$ et $81 = 9 \times 9$. Comme 9 est perdant, 81 est perdant et 729 est perdant.

Plus généralement, les puissances de 3 qui correspondent à des numéros perdants sont les puissances de 9, c'est-à-dire de la forme 3^a avec a pair.

3.

a. Pour $N = 100$, pas d'entrée dans la boucle et N n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».

Pour $N = 300$, pas d'entrée dans la boucle et N est divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est gagnant ».

Pour $N = 2016$, en sortie de boucle N est égal à 224 et N n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».

b. Si a est pair, en sortie de boucle N est égal à b qui n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».

Si a est impair, en sortie de boucle N est égal à $3b$ qui est divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est gagnant ».

4. D'après 3, les numéros perdants sont les nombres de la forme $3^a b$ où a est un entier naturel pair et b un entier naturel non divisible par 3.

Soient $3^a b$ et $3^{a'} b'$ deux numéros perdants c'est-à-dire tels que a et a' sont des entiers naturels pairs et b et b' sont des entiers naturels non divisibles par 3.

Le produit $p = 3^a b \times 3^{a'} b'$ est égal à $3^A B$ avec $A = a + a'$ et $B = bb'$.

A est un entier naturel pair comme somme de deux entiers naturels pairs. B est un entier naturel qui n'est pas divisible par 3 puisque ni b ni n b' le sont. Ainsi p est un numéro perdant.

5. Il y a 25% de numéros gagnants.

Une démarche possible : on dénombre les entiers de la forme $3^a b$ (où a est un entier naturel impair et b un entier naturel non divisible par 3) qui sont inférieurs ou égaux à 2016.

Les valeurs possibles de a sont 1, 3, 5.

Pour $a = 1$, on doit avoir $b \leq 672$ et b non divisible par 3. Comme il y a 224 multiples de 3 inférieurs ou égaux à 672, b peut prendre $672 - 224 = 448$ valeurs.

Pour $a = 3$, on doit avoir $b \leq 74$ (car $2016/27 \approx 74{,}7$) et b non divisible par 3. On en déduit que b peut prendre $74 - 24 = 50$ valeurs.

Pour $a = 5$, on doit avoir $b \leq 8$ et b non divisible par 3. On en déduit que b peut prendre 6 valeurs.

Finalement il y a $448 + 50 + 6 = 504$ numéros gagnants soit 25% de numéros gagnants.

6. La valeur minimale de n est 2689.

Une démarche possible : compte tenu de la question 5, on peut penser qu'il y a environ 25% de gagnants donc les 2016 numéros perdants représentent environ les trois quarts des billets vendus. Ce qui donne environ 2688 billets vendus.

Pour $n = 2688$, le même raisonnement qu'en 5 donne 673 gagnants donc 2015 perdants.

Pour $n = 2689$, le numéro 2689 est perdant donc il y a 2016 perdants.

Grande famille

1. On a 9 possibilités pour chaque chiffre, ce qui donne $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6561$ nombres dans $\mathcal{E}$.

2. • 2537 a 23 cousins. Pour écrire un entier de la famille de 2537, les quatre chiffres doivent être 2, 5, 3 et 7, il y a donc 4 possibilités pour le 1^er^, 3 pour le second, 2 pour le 3^e^ et 1 pour le 4^e^. Ce qui donne $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ membres de la famille de 2537.

• 2532 a 11 cousins. Les 12 membres de la famille de 2532 sont 2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532, 3225, 3252, 3522, 5223, 5232, 5322.

3. Il y a 9 éléments N de $\mathcal{E}$ tels que $Max(N) = Min(N)$. Ce sont ceux dont les quatre chiffres sont identiques : 1111, 2222, …, 9999.

4. N_0 =2789.

5. $T(2449) = 19$ et $P(2449) = 288$.

On peut prendre $N_1 = 2386$ ou l'un de ses cousins.

6. On peut prendre $N_2 = 2335$ ou l'un de ses cousins.

7.

a. $Min(N) = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$
et $Max(N) = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$
donc $Min(N) + Max(N) = 1001a + 110b + 110c + 1001d$
soit $Min(N) + Max(N) = 11[91(a + d) + 10(b + c)]$.

b. L'équation s'écrit $11[91(a + d) + 10(b + c)] = 11330$.
Elle est équivalente à $91(a + d) + 10(b + c) = 1030$.
On en déduit que $(a + d)$ est divisible par 10 donc égal à 10 (car $a + d \leq 18$).

c. $a + d = 10$ donne $10(b + c) = 120$ soit $b + c = 12$ donc $T(N) = 22$.

d. Il y a 148 solutions.
$Min(N)$ est l'un des nombres suivants : 1399, 1489, 2488, 1579, 2578, 3577, 1669, 2668, 3667, 4666. Les solutions sont les éléments des familles de ces 10 nombres.
Les familles de 1579, 1489 et 2578 ont chacune 24 éléments.
Les familles de 1399, 2488, 3577, 1669, 2668 et 3667 ont chacune 12 éléments.
La famille de 4666 a 4 éléments : 4666, 6466, 6646, 6664.
Finalement, il y a $3 \times 24 + 6 \times 12 + 4 = 148$ solutions.