RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté • Égalité • Fraternité

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

académie Bordeaux

Académie de Bordeaux

Mercredi 16 mars 2016 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter définitivement la salle avant la fin de l'épreuve (12h 10), il doit rendre les énoncés.

1re partie - 8 h à 10 h

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 2 (*Liber abaci*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Échanges thermiques*) et 3 (*Demi-tour !*)

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Échanges thermiques

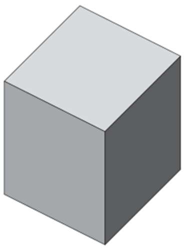
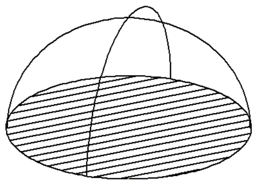
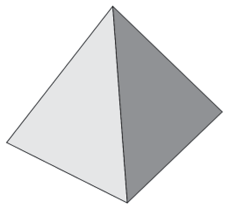
En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2*, à son volume, mesuré en* m^3*. Le facteur de compacité* $c = \frac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, *donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.*

1. Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.

a. Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté *a*.

b. Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.

c. Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté *a*, et de hauteur verticale *a*.

d. En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?

2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z .

a. Vérifier que pour tous nombres a, b et c :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

b. En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

c. En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :

$$A + B + C \geq 3.$$

d. Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

e. Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?

3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leq q \leq r$.

a. Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$

b. Démontrer que $3 \leq p \leq 6$.

c. Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leq q \leq 12$.

d. Terminer la résolution.

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Liber abaci

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ est-elle une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{4}{17}$, tandis que les sommes $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ et $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui, encore ouvertes.

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.

2. Un algorithme. Soient p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0;1[$

Poser $k = 1$, $p_1 = p$, $q_1 = q$.
Tant que $p_k \neq 0$

Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leq \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$.

Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.

Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.

Fin du Tant que.

a. On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

b. On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du *N*-ième tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

c. Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ rencontrées dans ce problème.

3. Et pour $\frac{p}{q} \geq 1$?

a. L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\frac{p}{q} > 1$?

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 3.

Justifier que : $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\ldots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}\ldots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1$

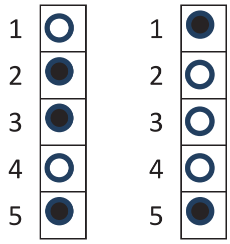
c. En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leq 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\ldots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

d. Établir alors que tout rationnel $\frac{p}{q} \geq 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Demi-tour !



Avant Après

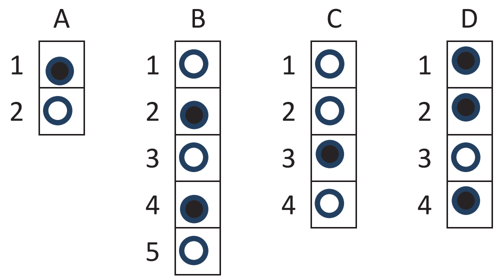
On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n,. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite– on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus.** Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?

2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?

3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :

Pour k allant de n à 1 par pas de -1

Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton

Fin Pour

a. Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?

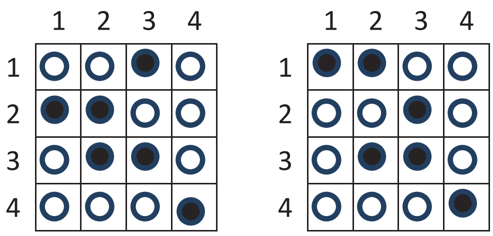
b. Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.

5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :

a. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.

b. À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.

6. Jeu à deux dimensions.



Avant Après

On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une *opération* est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(1, 1)$ et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés.** L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4 x 4.

Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

académie Bordeaux

Académie de Bordeaux

Mercredi 16 mars 2016 de 8 h à 12 h 10

Pause de 10 h à 10 h 10

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 h.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Si le candidat souhaite quitter définitivement la salle avant la fin de l'épreuve (12 h 10), il doit rendre les énoncés.

2e partie - 10 h 10 à 12 h 10

Exercices académiques

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Coloriage*) et 2 (*La Tombola*), les autres traitent les exercices numéros 1 (*Coloriage*) et 3 (*Grande famille*).

Exercice académique numéro 1

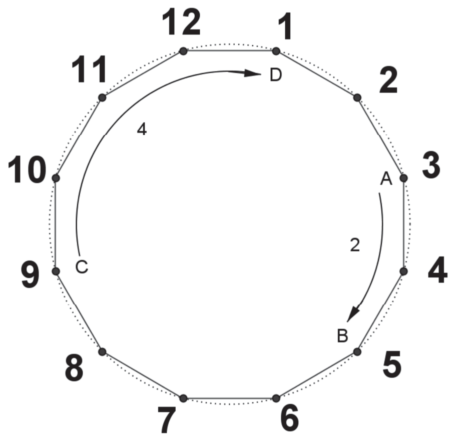
(à traiter par tous les candidats)

Coloriage

On a placé dans l'ordre les nombres 1,2, …, N aux sommets d'un polygone régulier.

La notion de distance est prise dans le sens suivant :
Soient A et B deux sommets du polygone. La distance entre A et B est la longueur du plus petit arc de cercle qui joint A et B, l'unité étant la longueur de l'arc séparant deux sommets consécutifs.

Par exemple, pour $N = 12$, si A et B correspondent aux points marqués 3 et 5, la distance entre A et B est 2. Si C et D correspondent aux points marqués 9 et 1, la distance entre C et D est 4.



1. Dans cette question, on suppose que le polygone a 12 sommets.
   - **a.** Montrer qu'il est possible de colorier quatre de ces points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?
   - **b.** Expliquer pourquoi cela n'est pas possible avec cinq points. On pourra comparer le nombre de paires avec le nombre de distances possibles.

On désigne désormais par N le nombre de sommets du polygone régulier, $N > 12$.

2. Quelle est la valeur minimale de N pour laquelle les points marqués 1, 2, 4, 8, 16 peuvent être coloriés en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?

3. On suppose que 5 points sont coloriés en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes.
   - **a.** Justifier que $N \geq 20$.
   - **b.** Démontrer que si N est pair, la distance entre deux points marqués a et b est un entier de même parité que $a - b$. En déduire que N est différent de 20.
   - **c.** Quelle est la valeur minimale de N qui permet de colorier cinq points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?

4. Montrer que pour $N = 2016$, on peut colorier en vert au moins 11 points ayant la propriété habituelle.

Exercice académique numéro 2

(à traiter par les candidats de la série S)

La tombola

Pour une tombola, on a vendu tous les billets numérotés 1, 2, 3, …, n où n est un entier supérieur ou égal à 2016.

On détermine les numéros des billets gagnants de la façon suivante : on écrit de gauche à droite la liste des entiers de 1 à n sur un tableau puis on passe en revue cette liste dans l'ordre croissant en effaçant les entiers qui sont les triples des nombres non effacés. On obtient donc la liste dont les premiers termes sont :

1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18 …

On décide que les numéros effacés sont les gagnants. Les autres sont perdants.

1. Justifier que le numéro 100 est perdant. En déduire que 300 est gagnant.
Le numéro 2016 est-il gagnant ou perdant ?

2. Démontrer que si le numéro a est perdant alors le numéro $9a$ l'est également.
Le numéro 729 est-il gagnant ou perdant ?
Parmi les numéros qui sont des puissances de 3, lesquels sont perdants ?

3. On admet que l'algorithme suivant permet de répondre à la question « le nombre saisi correspond-il à un numéro gagnant ? ».

```
Saisir un entier N
Tant que N est divisible par 9
        Remplacer N par N/9
Fin de boucle Tant que
Si N est divisible par 3
        Afficher « Le numéro N est gagnant »
Sinon
        Afficher « Le numéro N est perdant »
```

a. Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 100$, $N = 300$, $N = 2016$.

b. Soit a un entier supérieur ou égal à 1 et b un entier non divisible par 3.
Qu'affiche l'algorithme lorsque l'on saisit le nombre $N = 3^a b$.
On pourra distinguer deux cas selon la parité de a.

4. Démontrer qu'un numéro qui peut s'écrire comme produit de deux numéros perdants est perdant.

5. Dans cette question, on suppose que $n = 2016$.
Quel est le pourcentage de numéros gagnants ?

6. En réalité, on a dénombré 2016 numéros perdants.
Quelle est la plus petite valeur possible du nombre n de billets vendus ?

Exercice académique numéro 3

(à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Grande famille

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres entiers qui s'écrivent avec quatre chiffres, chacun de ces chiffres étant différent de 0.

On rappelle que l'entier écrit $\overline{abcd}$ dans le système décimal est égal à $1000a + 100b + 10c + d$ où a, b, c, d désignent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités.

1. Quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$?

Si N est un élément de $\mathcal{E}$, on appelle cousin de N tout nombre de $\mathcal{E}$, distinct de N, écrit avec les mêmes quatre chiffres que lui. Par exemple 4363 et 6343 sont cousins. Un nombre N et l'ensemble de ses cousins constituent la famille de N.

2. Quel est le nombre de cousins de 2537 ? de 2532 ?

N étant un élément de $\mathcal{E}$, on appelle $Max(N)$ le plus grand élément de sa famille et $Min(N)$ le plus petit.

3. Combien y a-t-il d'entiers N de $\mathcal{E}$ tels que $Max(N) = Min(N)$?

Si N est un élément de $\mathcal{E}$, on définit ses mensurations, à savoir sa taille notée $T(N)$ égale à la somme de ses chiffres et son poids noté $P(N)$ égal au produit de ses chiffres.

4. Quel est le plus petit entier N_0 de $\mathcal{E}$ dont le poids dépasse 1000 ?

5. Quelles sont les mensurations de 2449 ? Déterminer un entier N_1 de $\mathcal{E}$ qui n'est pas dans la famille de 2449 et a les mêmes mensurations.

6. Trouver un entier N_2 de $\mathcal{E}$ tel que $Min(N_2)$ est divisible par 5, $Max(N_2)$ est pair, $T(N_2) = 13$ et $P(N_2)$ est divisible par 3.

7. On s'intéresse aux entiers N de $\mathcal{E}$ tels que $Min(N) + Max(N) = 11\,330$.

   On désigne par a, b, c, d les chiffres de $Min(N)$ tels que $Min(N) = \overline{abcd}$ avec $a \leq b \leq c \leq d$.

   a) Montrer que $Min(N) + Max(N) = 11[91(a + d) + 10(b + c)]$
   b) Quelle est la valeur de $a + d$?
   c) Déterminer la taille de N.
   d) Combien d'entiers N de $\mathcal{E}$ sont solutions de l'équation $Min(N) + Max(N) = 11\,330$?