Suite récurrente 3

Fiche élève

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$.

Soit (S_n) la suite définie par $S_0 = 1$ et pour tout entier naturel *n*, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$.

Partie A : Étude de la suite (u_n)

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n).
2. a) Écrire sur papier un algorithme permettant de calculer le 1 001$^{\text{éme}}$ terme de la suite (u_n).
   (On pourra utiliser une boucle).
   b) Traduire cet algorithme avec le logiciel Xcas.
   c) Modifier l'algorithme précédent pour pouvoir calculer u_n pour tout *n*. On l'appellera **calcul_u(n)**.
   Application : donner la valeur de $u_{30}, u_{10\,000}, u_{999\,000}$.
3. Quelle conjecture pouvez-vous déduire des questions précédentes sur les variations de la suite (u_n) ?
   La démontrer.
   Quelle conjecture pouvez-vous déduire des questions précédentes sur la convergence de la suite (u_n) ?
4. Approfondissement : On veut trouver le plus petit entier naturel *n* vérifiant $u_n > 100\,000$.
   Construire un algorithme permettant de résoudre ce problème.

Partie B : Étude de la suite (s_n)

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.
2. Exprimer le terme S_n à l'aide de termes de la suite (u_n).
3. Le but de cette question est de calculer S_n pour tout entier *n*.
   En utilisant le programme **calcul_u(n)**, écrire un algorithme permettant de calculer S_n.
   Application : donner la valeur de S_4, S_{15} et S_{100}.

Partie C : Formule explicite de u_n en fonction de n

Rappel : $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier *n* par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Déterminer l'expression de v_n en fonction de *n*.
2. Déterminer $v_0 + v_1 + ... + v_n$ de deux manières différentes.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.
4. Valider les résultats de la question A-2) c).