

Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (4 points).
L'usage de la calculatrice est autorisé.

PREMIÈRE PARTIE
ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 points)

Exercice 1

Calculer les nombres suivants. On donnera les résultats sous la forme demandée :

A sous la forme d'une fraction irréductible : $A = \frac{6}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{2}$

B sous la forme d'un nombre entier : $B = \frac{\frac{3}{4} - 4}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}}$

C sous la forme d'un nombre décimal : $C = \frac{5}{2} - \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \right)$

D sous la forme d'une écriture scientifique : $D = \frac{15 \times 10^{-8}}{75 \times 10^{15}} \times (350 \times 10^4)$

Exercice 2

Soient $E = 7^4 \times 3^4$ et $F = (6^3)^2$.

Écrire E et F sous la forme d'une puissance d'un nombre entier.

Exercice 3

- Calculer le plus grand commun diviseur de 61 425 et 32 760.
- Simplifier la fraction $\frac{61425}{32760}$ pour la rendre irréductible.

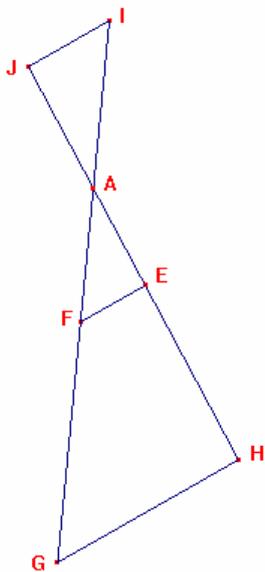
Exercice 4

- Développer et réduire l'expression $(5x - 2)^2$.
- Développer puis réduire l'expression $G = (5x - 2)(x + 7) - (5x - 2)^2$
- Factoriser l'expression G.
- Calculer G **a)** pour $x = 0$.
 b) pour $x = \frac{9}{4}$.

COLLÈGE DE CHANTACO		BREVET BLANC	
Coefficient 2	Session 2005		Durée : 2 heures
Spécialité : COLLÈGE			Épreuve : Mathématiques
Ce sujet comporte 3 pages			

DEUXIÈME PARTIE
ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (12 points)

Exercice 1



L'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-contre qui n'est pas à l'échelle.

1. Les droites (IG) et (JH) se coupent en un point A. Le point E est sur (JH) et le point F est sur (IG).

Les droites (EF) et (HG) sont parallèles.

On a :

$$AE = 3 \qquad AF = 4 \qquad AH = 7 \qquad \text{et} \qquad EF = 6$$

Calculer les longueurs AG et HG en justifiant la démarche utilisée.

Donner les résultats sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible.

2. On a : $AI = 6$ et $AJ = 4,5$

Les droites (IJ) et (EF) sont-elles parallèles ?

Justifier la démarche utilisée.

Exercice 2

L'unité de longueur est le centimètre et l'unité de volume est le centimètre cube.

On note h la hauteur d'eau d'un cylindre de rayon 8 et de hauteur 15 (figure 1).

On place alors au fond de ce cylindre une boule de rayon 6 et on constate que le cylindre est totalement rempli (figure 2).

- Calculer en fonction de π , le volume du cylindre.
- Montrer que la valeur exacte du volume de la boule est 288π .
- Déduire des questions précédentes la hauteur h de l'eau dans le cylindre avant qu'on y place la boule.

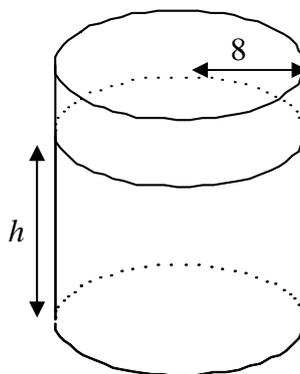


figure 1

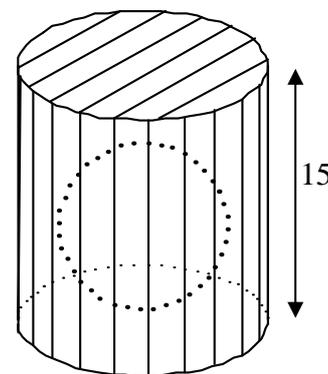


figure 2

Exercice 3

L'unité de longueur est le centimètre et l'unité de mesure d'angle est le degré.

- Tracer un segment [AB] tel que $AB = 7$. Placer un point C tel que $\widehat{BAC} = 70$ et $\widehat{ABC} = 60$. Calculer la mesure de l'angle \widehat{ACB} .
- Construire le cercle circonscrit au triangle ABC et appeler O son centre. On laissera les traits de construction.
- Tracer les segments [OA], [OB], [OC]. On pose $\widehat{OCB} = x$ (x représente la mesure en degrés de l'angle \widehat{OCB}).
 - Exprimer en fonction de x la mesure de chacun des angles suivants : \widehat{CBO} , \widehat{OBA} , \widehat{OCA} et \widehat{CAO} .
 - Vérifier que $\widehat{OBA} = 60 - x$ et démontrer que $\widehat{OAB} = 20 + x$
 - En déduire la mesure de l'angle \widehat{AOB} .

TROISIÈME PARTIE
QUESTIONS ENCHAÎNÉES (12 points)

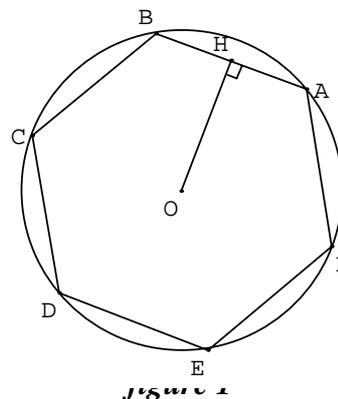
PREMIÈRE PARTIE

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans un cercle C de centre O et de rayon $R = 26$ cm (tous les côtés de cet hexagone mesurent 26 cm – Voir figure 1 ci-contre).

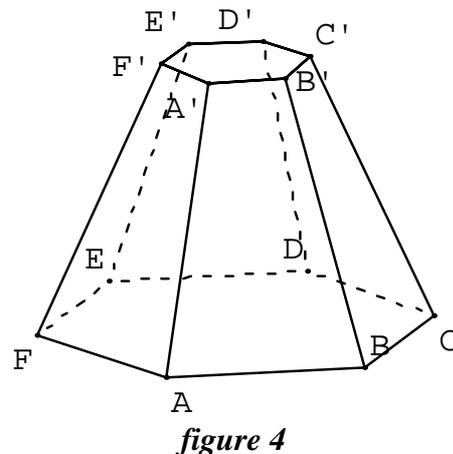
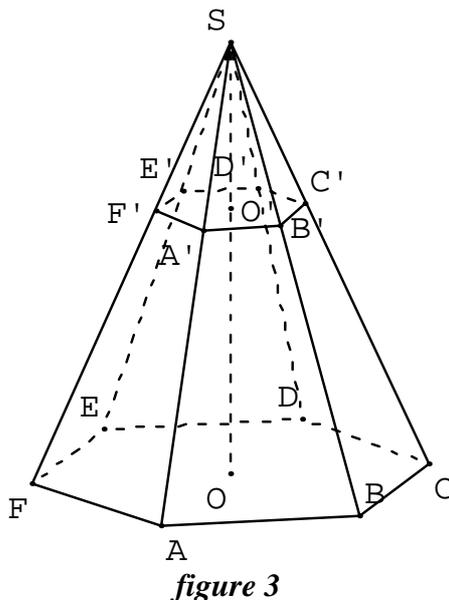
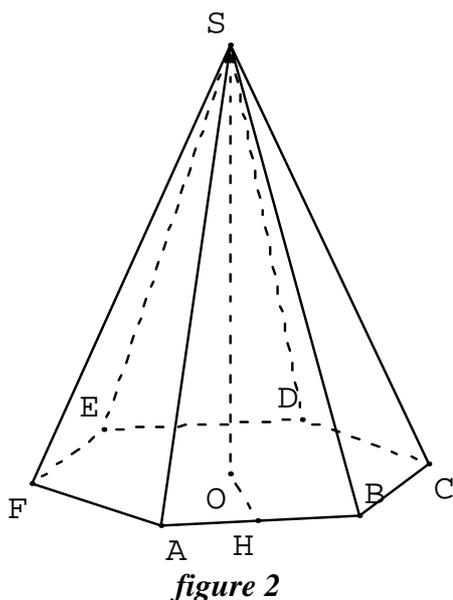
L'hexagone ABCDEF est la base d'une pyramide régulière de sommet S et de hauteur $SO = 83$ cm (voir figure 2 ci-dessous).

Le point H est le milieu de [AB].

On rappelle que les faces latérales de cette pyramide sont des triangles isocèles en S.



1. Le triangle SOB est rectangle en O. Calculer SB^2 .
2. Que représente la droite (SH) pour le triangle SAB ? Justifier.
3. Montrer que $SH = 86$ cm.
4. Calculer en centimètres carrés, l'aire du triangle SAB.
5. En déduire que l'aire latérale de la pyramide (aire de la pyramide sans la base) est 6708 cm².



DEUXIÈME PARTIE

Pour fabriquer l'abat-jour d'une lampe, on a coupé cette pyramide par un plan parallèle à la base (figure 3). On obtient ainsi un tronc de pyramide qui servira d'abat-jour (figure 4).

Ainsi, la pyramide $SA'B'C'D'E'F'$ est une réduction de la pyramide $SABCDEF$.

1. On donne $SO' = 33,2$ cm.

Calculer $\frac{SO'}{SO}$ et expliquer comment obtenir l'aire latérale de $SA'B'C'D'E'F'$ à partir de l'aire latérale de $SABCDEF$.

Calculer alors l'aire de l'abat-jour en centimètres carrés.

2. On suppose maintenant que $SO' = x$, avec $0 < x < 83$.

Montrer que l'aire A de l'abat-jour vérifie : $A = 6708 - \frac{6708}{6889} x^2$

Première partie : activités numériques

Exercice 1 :

$$A = \frac{6}{7} + \frac{4}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{6}{7} + \frac{2 \times 2 \times 5}{2 \times 7} = \frac{6}{7} + \frac{10}{7} = \frac{16}{7}$$

$$B = \frac{\frac{3}{4} - 4}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{16}{4}}{\frac{9}{12} + \frac{4}{12}} = \frac{-\frac{13}{4}}{\frac{13}{12}} = -\frac{13}{4} \times \frac{12}{13} = -\frac{12}{4} = -3$$

$$C = \frac{5}{2} - \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \right) = \frac{5}{2} - \left(\frac{28}{20} - \frac{15}{20} \right) = \frac{5}{2} - \frac{13}{20} = \frac{50}{20} - \frac{13}{20} = \frac{37}{20} = 1,85$$

$$D = \frac{15 \times 10^{-8}}{75 \times 10^{15}} \times (350 \times 10^4) = \frac{15 \times 350}{75} \times 10^{-8+4-15} = 70 \times 10^{-19} = 7 \times 10 \times 10^{-19} = 7 \times 10^{-18}$$

Exercice 2 :

$$E = 7^4 \times 3^4 = (7 \times 3)^4 = 21^4 \text{ et } F = (6^3)^2 = 6^{3 \times 2} = 6^6.$$

Exercice 3 :

1. Par la méthode de l'algorithme d'Euclide :

61 425	32 760	32 760	28 665	28 665	4 095
28 465		4 095		0 000	7
	1		1		

4 095 est le dernier reste non nul donc PGCD(61 425 ; 32 760) = 4 095.

2. On simplifie la fraction par le PGCD du numérateur et du dénominateur : $\frac{61425}{32760} = \frac{15 \times 4095}{8 \times 4095} = \frac{15}{8}$.

Exercice 4 :

1. $(5x - 2)^2 = 25x^2 - 20x + 4$

2.

$$\begin{aligned} G &= (5x - 2)(x + 7) - (5x - 2)^2 \\ &= 5x^2 + 35x - 2x - 14 - (25x^2 - 20x + 4) \\ &= 5x^2 + 35x - 2x - 14 - 25x^2 + 20x - 4 \\ &= -20x^2 + 53x - 18 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} G &= (5x - 2)(x + 7) - (5x - 2)^2 \\ &= (5x - 2)[(x + 7) - (5x - 2)] \\ &= (5x - 2)(x + 7 - 5x + 2) \\ &= (5x - 2)(-4x + 9) \end{aligned}$$

4. a) Pour $x = 0$, $G = -18$

b) Pour $x = \frac{9}{4}$, $G = \left(5 \times \frac{9}{4} - 2 \right) \left(-4 \times \frac{9}{4} + 9 \right) = \left(\frac{45}{4} - 2 \right) (-9 + 9) = \left(\frac{45}{4} - 2 \right) \times 0 = 0$

Deuxième partie : activités géométriques

Exercice 1 :

1. E est un point de la droite (AH), F est un point de la droite (AG). Les droites (EF) et (GH) sont parallèles donc, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AF}{AG} = \frac{AE}{AH} = \frac{EF}{GH}$.

• Considérons $\frac{AF}{AG} = \frac{AE}{AH}$ soit $\frac{4}{AG} = \frac{3}{7}$ d'où $AG = \frac{4 \times 7}{3} = \frac{28}{3}$ cm.

• Considérons $\frac{AE}{AH} = \frac{EF}{GH}$ soit $\frac{3}{7} = \frac{6}{GH}$ d'où $GH = \frac{6 \times 7}{3} = \frac{42}{3} = 14$ cm.

2. $\frac{AF}{AI} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $\frac{AE}{AJ} = \frac{3}{4,5} = \frac{2 \times 1,5}{3 \times 1,5} = \frac{2}{3}$. Donc $\frac{AF}{AI} = \frac{AE}{AJ}$ et comme les points I, A, F sont alignés dans le même ordre que les points J, A, E alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (EF) sont parallèles.

Exercice 2 :

1. Soit V_1 le volume du cylindre. $V_1 = \pi \times 8^2 \times 15 = 960\pi$ cm³

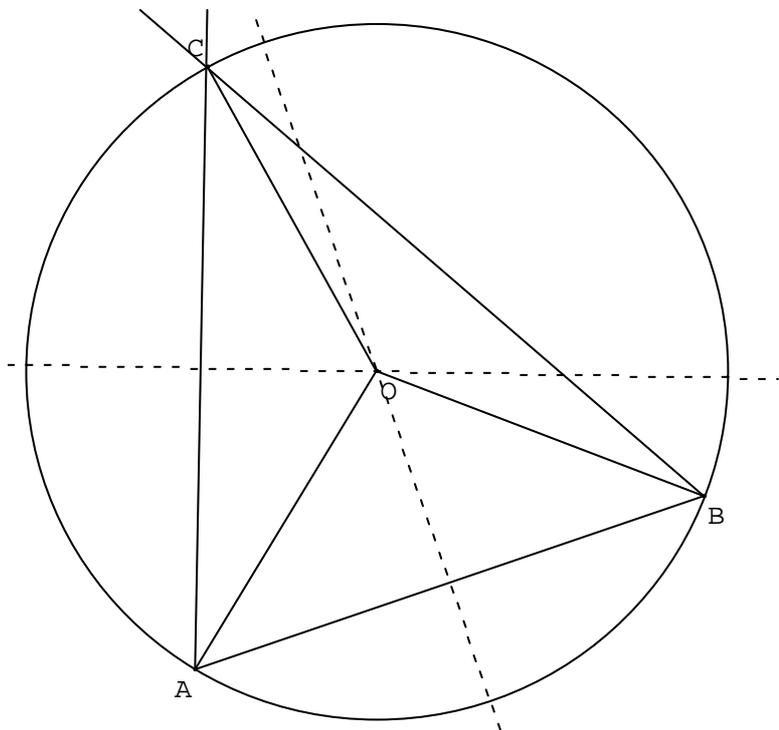
2. Soit V_2 le volume de la boule. $V_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi$ cm³

3. Soit V_3 le volume d'eau dans le cylindre. $V_3 = \pi \times 8^2 \times h = 64\pi \times h$.

On sait que $V_3 + V_2 = V_1$ soit $64\pi \times h + 288\pi = 960\pi$. D'où $64\pi \times h = 960\pi - 288\pi = 672\pi$.

Donc $h = \frac{672\pi}{64\pi} = \frac{672}{64} = 10,5$ cm.

Exercice 3 :



1. Dans le triangle ABC,

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{\angle ACB} &= 180 - (\overset{\frown}{\angle ABC} + \overset{\frown}{\angle BAC}) \\ &= 180 - (60 + 70) = 180 - 130 = 50^\circ \end{aligned}$$

3. a) • Le triangle OCB est isocèle de sommet principal O donc $\overset{\frown}{\angle OBC} = \overset{\frown}{\angle OCB} = x$

$$\bullet \overset{\frown}{\angle OBA} = \overset{\frown}{\angle ABC} - \overset{\frown}{\angle OBC} = 60 - x$$

$$\bullet \overset{\frown}{\angle OCA} = \overset{\frown}{\angle ACB} - \overset{\frown}{\angle OCB} = 50 - x$$

• Le triangle OCA est isocèle de sommet principal O donc $\overset{\frown}{\angle CAO} = \overset{\frown}{\angle OCA} = 50 - x$

$$\text{b) } \overset{\frown}{\angle OBA} = 60 - x.$$

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{\angle OAB} &= \overset{\frown}{\angle CAB} - \overset{\frown}{\angle OAC} = 70 - (50 - x) \\ &= 70 - 50 + x = 20 + x \end{aligned}$$

c) Dans le triangle BOA,

$$\begin{aligned} \overset{\frown}{\angle AOB} &= 180 - (\overset{\frown}{\angle OAB} + \overset{\frown}{\angle OBA}) \\ &= 180 - [(20 + x) + (60 - x)] \\ &= 180 - 80 = 100^\circ. \end{aligned}$$

TROISIÈME PARTIE : QUESTIONS ENCHAÎNÉES

Première partie

1. Dans le triangle SOB, rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore,
 $SB^2 = SO^2 + OB^2 = 83^2 + 26^2 = 6\,889 + 676 = 7\,565 \text{ cm}^2$
2. H est le milieu de [AB] donc (SH) est la médiane issue de S du triangle SAB. Comme SAB est isocèle, la médiane (SH) issue du sommet principal S est aussi une hauteur.
3. D'après la question précédente, $BH = \frac{AB}{2} = \frac{26}{2} = 13 \text{ cm}$ et (SH) est perpendiculaire à (AB), donc le triangle SBH est rectangle en H. Donc, d'après le théorème de Pythagore, $SB^2 = SH^2 + BH^2$
 $SH^2 = 7\,565 - 13^2 = 7\,565 - 169 = 7\,396$ et $SH = \sqrt{7\,396} = 86 \text{ cm}$.
3. aire du triangle SAB : $\frac{AB \times SH}{2} = \frac{26 \times 86}{2} = 1\,118 \text{ cm}^2$
4. aire latérale de la pyramide SABCDEF : $\mathcal{A}_1 = 6 \times 1\,118 = 6\,708 \text{ cm}^2$

deuxième partie

1. $\frac{SO'}{SO} = \frac{33,2}{83} = 0,4$. La pyramide SA'B'C'D'E'F' est une réduction de la pyramide SABCDEF. L'échelle de la réduction est 0,4. Donc l'aire latérale \mathcal{A}_2 de SA'B'C'D'E'F' s'obtient en multipliant l'aire latérale \mathcal{A}_1 de SABCDEF par $0,4^2$. Donc $\mathcal{A}_2 = 0,4^2 \times \mathcal{A}_1 = 0,16 \times 6\,708 = 1\,073,28 \text{ cm}^2$
Aire de l'abat-jour : $A = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = 6\,708 - 1\,073,28 = 5\,634,72 \text{ cm}^2$
2. $\frac{SO'}{SO} = \frac{x}{83}$. $\mathcal{A}_2 = \left(\frac{x}{83}\right)^2 \times \mathcal{A}_1 = \frac{x^2}{6\,889} \times 6\,708 = \frac{6\,708}{6\,889} x^2$

Donc $A = \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2 = 6\,708 - \frac{6\,708}{6\,889} x^2$