BREVET "BLANC"

Épreuve
de
MATHÉMATIQUE

Durée : 2 heures

Année scolaire 2008 – 2009
Mercredi 8 avril 2009

PREMIÈRE PARTIE

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (***12 points***)

Ces trois exercices sont indépendants.

Rédigez avec soin toutes les étapes des calculs.

Exercice 1

1) Par l'algorithme de votre choix, calculez le *P.G.C.D.* des nombres : 1 080 et 1 350.

Un confiseur possède 1 080 dragées bleues et 1 350 dragées roses.
Il veut réaliser des petits sachets de façon à ce que :

- tous les sachets contiennent le même nombre de dragées roses ;
- tous les sachets contiennent le même nombre de dragées bleues.

2) *a*) Quel est le nombre maximal de sachets réalisables ?
   b) Dans chaque sachet, quel est le nombre de dragées roses et celui de dragées bleues ?

Exercice 2

On donne l'expression : $E = 4x^2 - 12x - 27$, où x est un nombre réel.

1) Calculez la valeur numérique exacte réduite de E, pour : $x = -3\sqrt{2}$.
2) Démontrez l'égalité : $2\left(4x^2 - 9\right) - (2x+3)^2 = E$.
3) Factorisez : $\left(4x^2 - 9\right)$.
4) Factorisez E, chaque facteur étant réduit.
5) Résolvez l'équation : $E = 0$.

Exercice 3

Les représentations graphiques se feront sur un axe gradué, d'unité : OI=1 *cm*, avec les conventions usuelles.

1) Résolvez et représentez graphiquement, sur la même droite graduée,
   les deux inéquations d'inconnue x :

$$-2x + 9 \text{ Ô } -3(x-4) \qquad \text{et} \qquad -3x + 7 < 9 - 2x.$$

2) Exprimez, sous forme d'un encadrement de x, l'ensemble des solutions communes aux deux inéquations : $\begin{cases} -2x + 9 \text{ Ô } -3(x-4) \\ -3x + 7 < 9 - 2x \end{cases}$.

DEUXIÈME PARTIE

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (***12 points***)

Ces trois exercices sont indépendants.

Les figures ci-après ne sont pas conformes aux dimensions données.

Exercice 1

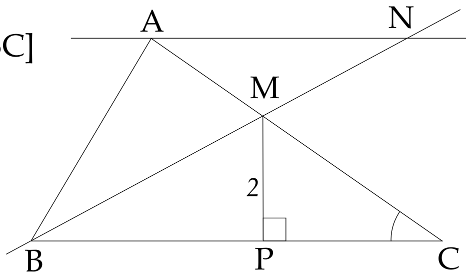
Pour les calculs de trigonométrie, utilisez les valeurs exactes du tableau.

	sin	*cos*	*tan*
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

ABC est un triangle tel que : $AC = 6\ cm$; $AB = 2\sqrt{3}\ cm$ et $BC = 4\sqrt{3}\ cm$.

1) Démontrez que le triangle ABC est rectangle.
   Déduisez-en la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

M est le point du segment [AC] et P est le point du segment [BC] tels que (MP) est perpendiculaire à (BC) avec $MP = 2\ cm$.

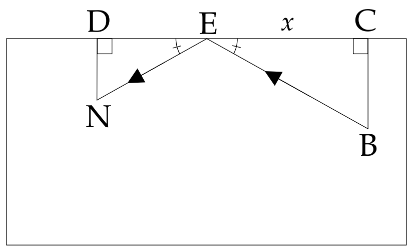


2) Montrez que la longueur MC est égale à 4 *cm*.

La droite (BM) coupe, au point N, la droite parallèle à la droite (BC) passant par A.

3) Calculez les longueurs exactes MA puis NA.

Exercice 2



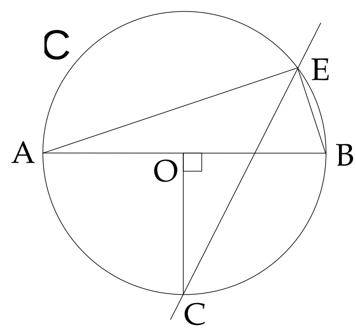
Le rectangle ci-contre représente une table de billard.
Deux boules de billard B et N sont placées telles que :
$CD = 90\ cm$, $BC = 35\ cm$ et $ND = 25\ cm$.

Les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{NDC}$ sont droits.
E est sur [CD]. Le joueur veut toucher la boule N avec la boule B en suivant le trajet BEN, avec $\widehat{BEC} = \widehat{NED}$. On pose : $CE = x\ cm$.

1) *a*) Donnez un encadrement de x.
   b) Exprimez ED en fonction de x.
   c) Dans le triangle BEC, exprimez $\tan \widehat{BEC}$ en fonction de x.
   d) Dans le triangle NED, exprimez $\tan \widehat{NED}$ en fonction de x.
2) *a*) En égalant les quotients trouvés en 1)*c*) et 1)*d*), on obtient l'équation : $35(90 - x) = 25x$
   (*on ne demande pas de justification*). Résolvez cette équation.
   b) Déduisez-en la valeur commune, arrondie au degré, des angles $\widehat{BEC}$ et $\widehat{NED}$.

Exercice 3

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O de diamètre [AB].
C est un point de $\mathcal{C}$. (AB) et (OC) sont perpendiculaires.
E est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ auquel n'appartient pas C.



1) Combien mesure l'angle $\widehat{CEA}$? Justifiez.
2) Combien mesure l'angle $\widehat{CEB}$? Justifiez.
3) Que représente [EC] pour l'angle $\widehat{AEB}$? Justifiez.

Tournez la page ⇨⇨⇨

TROISIÈME PARTIE

PROBLÈME (*12 points*)

*Sur la feuille fournie en annexe, quadrillée 5×5 mm et **à remettre avec la copie**,*
dessinez la figure comportant tous les éléments géométriques mentionnés dans ce problème.

ABC est un triangle isocèle de base [BC].
[AH] est sa hauteur principale.
$BC = 12\ cm$ et $AH = 8\ cm$.

1) Démontrez que : $AB = 10\ cm$.
2) Calculez la valeur exacte du *cosinus* de l'angle $\widehat{ABH}$.

Sur le segment [BC], O est le point tel que : $BO = 5\ cm$.
$\mathcal{C}$ est le cercle de centre O qui passe par le point B.
Ce cercle $\mathcal{C}$ recoupe [AB] au point M et [BC] au point D.

3) Démontrez que le triangle BMD est rectangle en M.
4) En utilisant la valeur du *cosinus* de l'angle $\widehat{ABH}$, calculée à la question 3), démontrez que la longueur de [BM] est égale à 6 *cm*.
5) Démontrez que la longueur DM est égale à 8 *cm*.

Dans le triangle ABC, la hauteur qui passe par le sommet C coupe le côté [AB] au point K.

6) *a*) Démontrez que les droites (CK) et (DM) sont parallèles.
   b) Calculez la longueur CK.

Les droites (DM) et (AH) se coupent au point I.

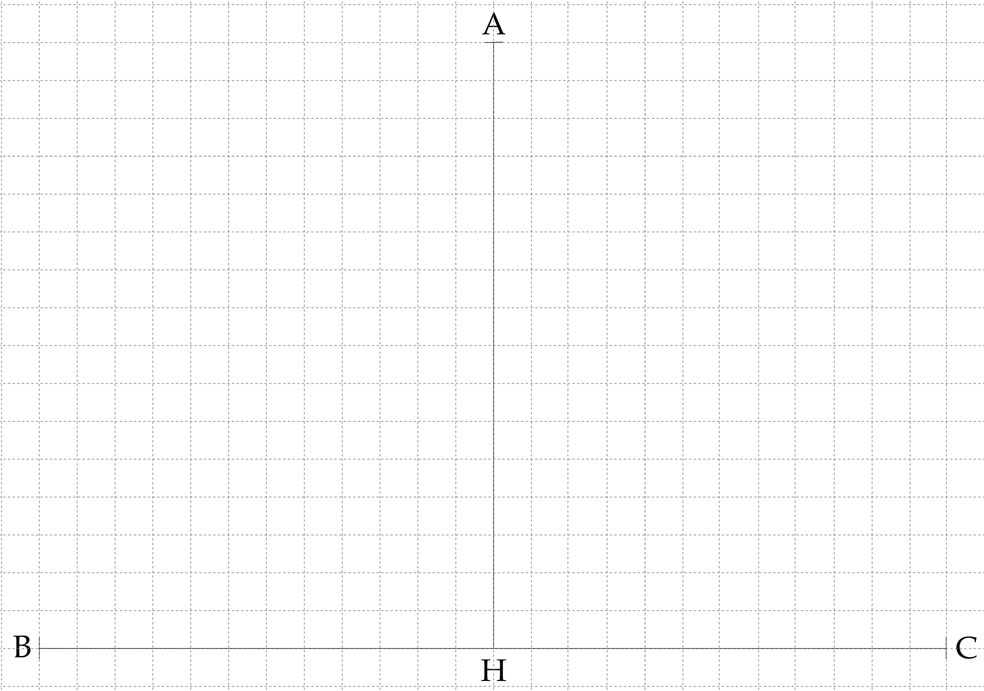
7) Que représente le point I pour le triangle ABD ? Justifiez.

Les droites (BI) et (AD) se coupent au point J.

8) Démontrez que la droite (BJ) est perpendiculaire à la droite (AD).
9) Démontrez que le point J appartient au cercle $\mathcal{C}$.

Rédaction et Présentation : ***4 points***

Figure du problème de la troisième partie



À remettre avec la copie.

Numéro d'anonymat : ....

BREVET BLANC – CORRECTION DE LA PREMIÈRE PARTIE

Exercice 1

1)

Soustraction	*a*	*b*	***a–b***
1 350–1 080=270	1 350	1 080	270
1 080–270=810	1 080	270	810
810–270=540	810	270	540
540–270=270	540	270	**270**
270–270=0	270	270	0

Division euclidienne	*Diviseur*	*dividende*	***reste***
1 350=1 080×1+270	1 350	1 080	**270**
1 080=270×4+0	1 080	270	0

Donc : *P.G.C.D.*(1 350 ; 1 080)=**270**.

2) *a*) Le nombre **maximal** de **sachets** réalisables est le **plus grand** diviseur commun : **270**.

b) Comme on distribue : 1 350=270×5 dragées **roses**,
alors : chaque **sachet** comporte : 5 dragées **roses**.
Comme on distribue : 1 080=270×4 dragées **bleues**,
alors : chaque **sachet** comporte : 4 dragées **bleues**.

Exercice 2

1) Lorsque : $x=-3\sqrt{2}$, l'expression : $E=4x^2-12x-27$ s'écrit :

$$4\times\left(-3\sqrt{2}\right)^2-12\times\left(-3\sqrt{2}\right)-27=4\times18+36\sqrt{2}-27=72-27+36\sqrt{2}=45+36\sqrt{2}.$$

2) $2\left(4x^2-9\right)-(2x+3)^2=8x^2-18-\left(4x^2+12x+9\right)=8x^2-18-4x^2-12x-9=4x^2-12x-27=E$.

3) Factorisons la **différence de deux carrés** : $4x^2-9=(2x)^2-3^2=(2x-3)(2x+3)$.

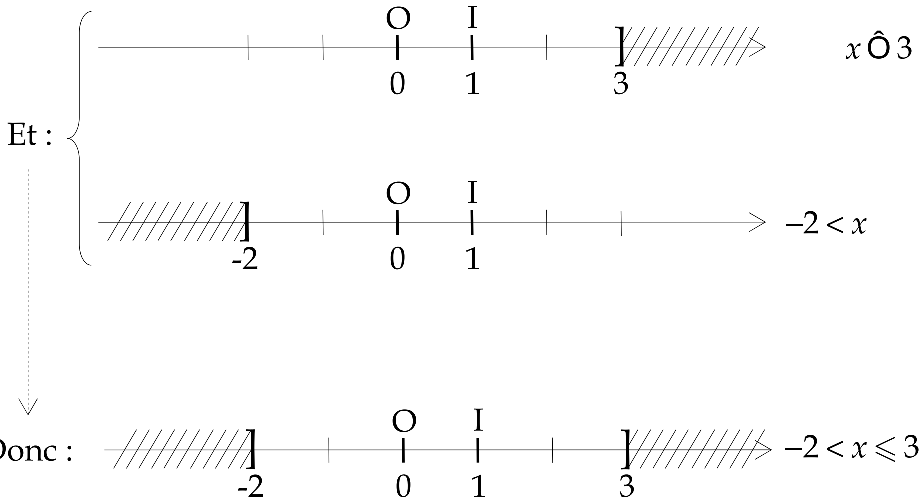
4) Factorisons l'expression E sous la forme exprimée à la question 2) :
le **facteur commun** apparaît : $E=2\left(4x^2-9\right)-(2x+3)^2=2(2x-3)(2x+3)-(2x+3)^2$;
réduisons : $E=(2x+3)\left[2(2x-3)-(2x+3)\right]=(2x+3)[4x-6-2x-3]=(2x+3)(2x-9)$.

5) L'équation : E=0 se résous sous sa forme d'**équation « produit nul »**,
en se servant du résultat de la question 4) : $(2x+3)(2x-9)=0$.
« ***Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il suffit qu'un de ses facteurs soit nul.*** » :
Les solutions de E=0 sont donc solutions des **deux équations** : $2x+3=0$ ou $2x-9=0$.
Les **solutions** de l'équation : E=0 sont alors : $-\frac{3}{2}$ et $\frac{9}{2}$.

Exercice 3

1) $-2x+9\leqslant-3(x-4)$;
$-2x+9\leqslant-3x+12$;
$-2x+3x\leqslant12-9$;
$x\leqslant3$.

$-3x+7<9-2x$;
$-3x+2x<9-7$;
$-x<2$;
$x>-2$.



2) $\begin{cases}-2x+9\leqslant-3(x-4)\\-3x+7<9-2x\end{cases}$;

$\begin{cases}x\leqslant3\\x>-2\end{cases}$;

Donc : $-2<x\leqslant3$.

BREVET BLANC – CORRECTION DE LA DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1

1) Dans le **triangle** ABC : $AC^2 = 6^2 = 36$; $AB^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$; $BC^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 48$.

   Comme : $36 + 12 = 48$, alors : $AC^2 + AB^2 = BC^2$.
   La **réciproque** du **théorème de Pythagore** indique que le triangle ABC est **rectangle** en A.

   Dans le **triangle** ABC, **rectangle** en A : $sin\,\widehat{ACB} = \dfrac{BA}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$. Donc : $\widehat{ACB} = 30^o$.

2) Comme : $M \in [CA)$ et $P \in [CB)$, alors : $\widehat{MCP} = \widehat{ACB}$, puis : $sin\,\widehat{MCP} = sin\,\widehat{ACB} = sin\,30^o = \dfrac{1}{2}$.

   Alors : $sin\,\widehat{MCP} = \dfrac{MP}{MC} = \dfrac{2}{MC} = \dfrac{1}{2}$. Donc : $MC = \dfrac{2 \times 2}{1} = 4\,cm$.

3) Comme : $M \in [CA)$, alors : $MA = AC - MC = 6 - 4 = 2\,cm$.

   Les droites (BN) et (CA) sont **sécantes** en M et les droites (BC) et (NA) sont **parallèles**.

   Le **théorème de Thalès** s'écrit : $\dfrac{MN}{MB} = \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{BC}$. Donc : $\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{NA}{BC}$ puis : $\dfrac{2}{4} = \dfrac{NA}{4\sqrt{3}}$.

   Alors : $NA = \dfrac{2 \times 4\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}\,cm$.

Exercice 2

1) *a*) Comme : $E \in [CD]$, alors : $0 \leqslant x \leqslant 90$.

   b) Comme : $E \in [CD]$, alors : $ED = CD - CE = 90 - x\,cm$.

   c) Dans le **triangle** BEC, **rectangle** en C : $tan\,\widehat{BEC} = \dfrac{CB}{CE} = \dfrac{35}{x}$, avec : $0 < x \leqslant 90$.

   d) Dans le **triangle** NED, **rectangle** en D : $tan\,\widehat{NED} = \dfrac{DN}{DE} = \dfrac{25}{90 - x}$, avec : $0 \leqslant x < 90$.

2) *a*)

$35(90 - x) = 25x$;	$35 \times 90 = 25x + 35x$;	$x = \dfrac{3\,150}{60} = 52,5\,cm$.
$35 \times 90 - 35 \times x = 25x$;	$3\,150 = 60x$;	Avec : $0 < 52,5 < 90$.

   b) Dans le **triangle** BEC, **rectangle** en C : $tan\,\widehat{BEC} = \dfrac{35}{52,5}$. Donc : $\widehat{BEC} \approx 33,69^o \approx 34^o$.

   Dans le **triangle** NED, **rectangle** en D : $tan\,\widehat{NED} = \dfrac{25}{90 - 52,5} = \dfrac{25}{37,5}$. Donc : $\widehat{NED} \approx 34^o$.

Exercice 3

1) Dans le **cercle** $\mathcal{C}$, l'**angle inscrit** $\widehat{CEA}$ **intercepte** le **même arc** $\overset{\frown}{AC}$ que l'**angle au centre** $\widehat{COA}$.

   Alors : $\widehat{CEA} = \dfrac{1}{2} \times \widehat{COA} = \dfrac{1}{2} \times 90 = 45^o$.

2) Dans le **cercle** $\mathcal{C}$, l'**angle inscrit** $\widehat{CEB}$ **intercepte** le **même arc** $\overset{\frown}{CB}$ que l'**angle au centre** $\widehat{COB}$.

   Alors : $\widehat{CEB} = \dfrac{1}{2} \times \widehat{COB} = \dfrac{1}{2} \times 90 = 45^o$.

3) La demi-droite [EC) **partage** l'angle $\widehat{AEB}$ en deux **angles adjacents** de **même mesure** 45°.

   La demi-droite [EC) est donc la **bissectrice** de l'angle $\widehat{AEB}$.

BREVET BLANC – CORRECTION DE LA TROISIÈME PARTIE

1) Le triangle ABC est **isocèle** en A. [BC] et sa **base**. [AH] est sa **hauteur principale**. Alors :
H est le **milieu** de [BC]. Donc : $BH = \frac{BC}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm$ et le triangle ABH est **rectangle** en H.
Le **théorème de Pythagore** s'y écrit : $AB^2 = BH^2 + AH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$. Donc : $AB = 10\ cm$.

2) Dans le **triangle** ABH, **rectangle** en H : $cos\ \widehat{ABH} = \frac{BH}{BA} = \frac{6}{10}$.

3) Le côté [BD] du triangle BMD est un **diamètre** de son **cercle circonscrit**.
Alors le triangle BMD est **rectangle** en M et son hypoténuse est [BD].

4) Comme : $M \in [BA)$ et $D \in [BH)$, alors l'angle $\widehat{ABH}$ est **identique** à l'angle $\widehat{MBD}$.
Donc : $\widehat{MBD} = \widehat{ABH}$ et : $cos\ \widehat{MBD} = cos\ \widehat{ABH} = \frac{6}{10}$.
Dans le **triangle** BMD, **rectangle** en M : $cos\ \widehat{MBD} = \frac{BM}{BD} = \frac{BM}{10} = \frac{6}{10}$. Alors : $BM = 6\ cm$.

5) Dans le triangle BMD, rectangle en M, le **théorème de Pythagore** s'écrit :
$DM^2 = DB^2 - BM^2 = 10^2 - 6^2 = 64$. Donc : $DM = 8\ cm$.

6) *a*) Le triangle BMD est **rectangle** en M et les droites (CK) et (AB) sont **perpendiculaires**.
Alors les droites (CK) et (DM) sont **toutes deux perpendiculaires** à la droite (AB) :
les droites (CK) et (DM) sont donc **parallèles** entre elles.

b) Les droites (KM) et (CD) sont **sécantes** en B et les droites (CK) et (DM) sont **parallèles**.
Alors le **théorème de Thalès** s'écrit : $\frac{BD}{BC} = \frac{BM}{BK} = \frac{DM}{CK}$. Donc : $\frac{BD}{BC} = \frac{DM}{CK}$.
Puis : $\frac{10}{12} = \frac{8}{CK}$. Alors : $CK = \frac{12 \times 8}{10} = 9{,}6\ cm$.

7) Dans le triangle ABD : (AH) est **perpendiculaire** à [BD] et (DM) est **perpendiculaire** à [AB].
(AH) et (DM) sont **deux** des trois **hauteurs** du triangle ABD.
Leur point d'**intersection** I est donc l'**orthocentre** du triangle ABD.

8) Comme $J \in [BI)$, la droite (BI) s'écrit également (BJ).
Elle passe par le **sommet** B et l'**orthocentre** I.
Alors (BJ) est la **troisième hauteur** du triangle ABD, relative au côté [AD].
Donc : la droite (BJ) est **perpendiculaire** à la droite (AD).

9) Comme $J \in [AD]$, (BJ) est perpendiculaire à (JD) et le **triangle** BJD est **rectangle** en J.
Il est donc **inscrit** dans le **cercle** dont un **diamètre** est son **hypoténuse** [BD].
Ce cercle est le cercle $\mathcal{C}$. Donc le sommet J de l'angle droit $\widehat{BJD}$ **appartient** au cercle $\mathcal{C}$.

BREVET BLANC – ***CORRIGÉ DE LA FIGURE DU PROBLÈME DE LA TROISIÈME PARTIE***