Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (4 points).
L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIÈRE PARTIE

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 POINTS)

EXERCICE 1 :

Pour chacune des fractions A et B, dire en justifiant, si elle est irréductible. Si ce n'est pas le cas, rendre la fraction irréductible.

$A = \dfrac{108}{331}$ et $B = \dfrac{7\,797}{4\,407}$

EXERCICE 2 :

Résoudre les équations suivantes :

a) $(x + 7) - (2 - x) = 0$.

b) $5(x + 7) - 9(2 - x) = 0$.

c) $x^2 = 95$.

EXERCICE 3 :

a) Ecrire l'expression C sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier relatif et b entier le plus petit possible :
$C = \sqrt{27} + \sqrt{75} - 12\sqrt{3}$

b) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de D :
$D = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

EXERCICE 4 :

Soit $E = (2x - 3)^2 - 36$.

a) Développer et réduire E.

b) Factoriser E.

c) Calculer E pour $x = -\dfrac{3}{2}$

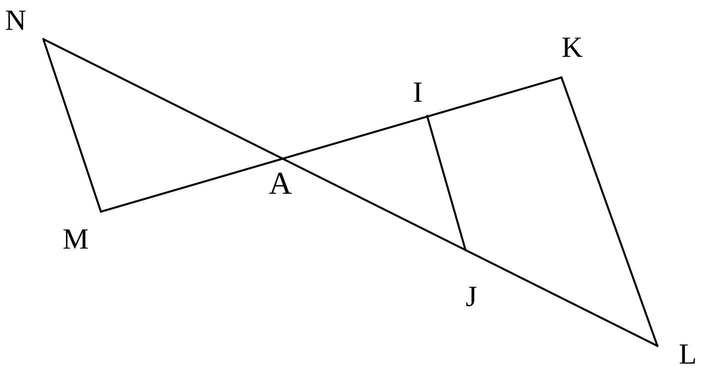
COLLEGE MAX BRAMERIE DE LA FORCE		
Temps alloué : **2H**	Coefficient : **2**	BREVET BLANC
Epreuve : **Mathématiques**		Date : **février/mars 2003**
Ce sujet comporte : **3 pages**		Série collège : **1/3**

DEUXIÈME PARTIE

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (12 POINTS)

EXERCICE 1 :

On ne demande pas de refaire la figure ; l'unité est centimètre.



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.

On donne :

(NM) // (KL)

AK = 8 et AM = 5

KL = 6 et AL = 12

1°) Calculer, en justifiant, les distances AN et MN.

2°) Les points I et J sont tels que AI = 3 et AJ = 4,5.

a) Prouver que (IJ) // (KL).

b) Calculer IJ.

EXERCICE 2 :

1°) Construire un triangle ABC tel que :

AB = 6 cm ; BC = 4,5 cm et AC = 7,5 cm.

2°) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

3°) Préciser la position du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ainsi que la mesure de son rayon ; justifier.

4°) Calculer tan $\widehat{A}$ puis donner l'arrondi, au degré près, de la mesure de l'angle $\widehat{A}$.

TROISIÈME PARTIE

QUESTIONS ENCHAÎNÉES (12 POINTS)

1°) Construire un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 3 cm.

Placer sur ce cercle deux points E et F tels que le triangle OEF soit équilatéral.

Tracer la tangente au cercle $(\mathcal{C})$ passant par E ; elle coupe la droite (OF) en A.

2°) Quelle est la nature du triangle OEA ?

3°) Justifier que la mesure de l'angle $\widehat{AOE}$ est 60°. Sachant que $\cos 60° = \frac{1}{2}$, calculer la distance OA. En déduire que F est le milieu du segment [AO].

4°) Calculer la valeur exacte de EA et l'exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers, b étant le plus petit possible.

5°) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{EAO}$? Déduire les valeurs exactes de sin 30° et de cos 30° à partir des réponses précédentes.

6°) Placer sur la figure le point M, image de E par la symétrie de centre F.

7°) Quelle est la nature du quadrilatère AEOM ?

8°) Donner les valeurs exactes du périmètre **P(AEOM)** et de l'aire **A(AEOM)** du quadrilatère AEOM.

<u>SOLUTION : PREMIÈRE PARTIE</u>

<u>EXERCICE 1 :</u> pour chaque fraction on peut rechercher le PGCD du numérateur et dénominateur …

1/ L'algorithme d'Euclide donne :

$331 = 108 \times 3 + 7$
$108 = 7 \times 15 + 3$
$7 = 3 \times 2 + \boxed{1}$
$3 = 1 \times 3 + 0$

Le dernier reste non nul (encadré) est le PGCD donc : $\boxed{\text{PGCD }(331 ; 108) = 1}$.

Pour la fraction A, le PGCD du numérateur et dénominateur est égal à 1 ; ils sont premiers entre eux et A est irréductible.

$A = \frac{108}{331}$ (forme irréductible)

2/ L'algorithme d'Euclide donne :

$7\,797 = 4\,407 \times 1 + 3\,390$
$4\,407 = 3\,390 \times 1 + 1\,017$
$3\,390 = 1\,017 \times 3 + \boxed{339}$
$1\,017 = 339 \times 3 + 0$

Le dernier reste non nul (encadré) est le PGCD donc :

$\boxed{\text{PGCD }(7\,797 ; 4\,407) = 339}$.

Pour la fraction B, le PGCD du numérateur et dénominateur est égal à 339 ; ils ne sont pas premiers entre eux et leur plus grand diviseur commun est 339.
La fraction B <u>n'est pas irréductible</u> ; on peut la simplifier par 339 :

$B = \frac{7\,797}{4\,407} = \frac{7\,797 \div 339}{4\,407 \div 339} = \boxed{\frac{23}{13}}$ (forme irréductible)

<u>EXERCICE 2 :</u>

a) $(x + 7) - (2 - x) = 0$ $x + 7 - 2 + x = 0$ $2x + 5 = 0$ $2x = -5$ $x = (-\frac{5}{2})$ Cette équation admet une solution $\left(-\frac{5}{2}\right)$	**b)** $5(x + 7) - 9(2 - x) = 0$ $5x + 35 - 18 + 9x = 0$ $14x + 17 = 0$ $14x = -17$ $x = -\frac{17}{14}$ Cette équation admet une solution $\left(-\frac{17}{14}\right)$	c**)** $x^2 = 95$ 95 est positif, cette équation admet deux solutions opposées $\sqrt{95}$ et $(-\sqrt{95})$

<u>EXERCICE 3 :</u>

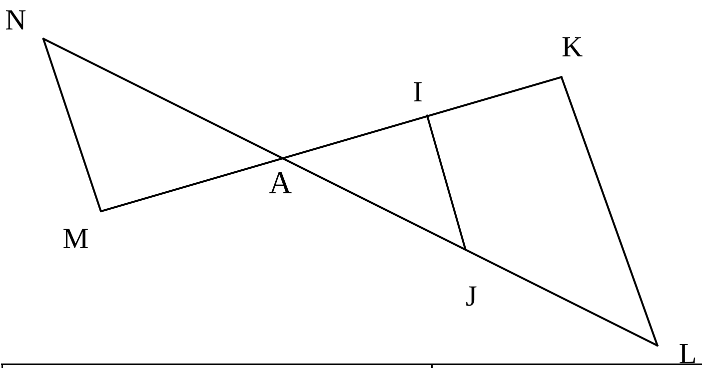
$C = \sqrt{27} + \sqrt{75} - 12\sqrt{3}$ $C = \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} - 12 \times \sqrt{3}$ $C = \sqrt{9} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 12 \times \sqrt{3}$ $C = 3 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3} - 12 \times \sqrt{3}$ $C = (3 + 5 - 12) \times \sqrt{3}$ $C = (-4) \times \sqrt{3}$ $C = -4\sqrt{3}$	Avec la calculatrice on lit $(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \div (\sqrt{7} + \sqrt{3}) \ll 0{,}955\,168\,926$ … Alors $D \ll 0{,}96$ arrondi à 10^{-2} près.

<u>EXERCICE 4 :</u>

a) $E = (2x - 3)^2 - 36$ $E = [(2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2] - 36$ $E = [4x^2 - 12x + 9] - 36$ $E = 4x^2 - 12x + 9 - 36$ $E = 4x^2 - 12x - 27$	b) $E = (2x - 3)^2 - 36$ $E = (2x - 3)^2 - 6^2$ $E = [(2x - 3) + 6][(2x - 3) - 6]$ $E = (2x - 3 + 6)(2x - 3 - 6)$ $E = (2x + 3)(2x - 9)$	c) Pour $x = -\frac{3}{2}$ $E = [2 \times (-\frac{3}{2}) + 3][2 \times (-\frac{3}{2}) - 9]$ $E = (-3 + 3)[2 \times (-\frac{3}{2}) - 9]$ $E = 0 \times [2 \times (-\frac{3}{2}) - 9]$ $E = 0$

SOLUTION : DEUXIEME PARTIE

EXERCICE 1 : On ne demande pas de refaire la figure ; l'unité est centimètre.



La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.

On donne :

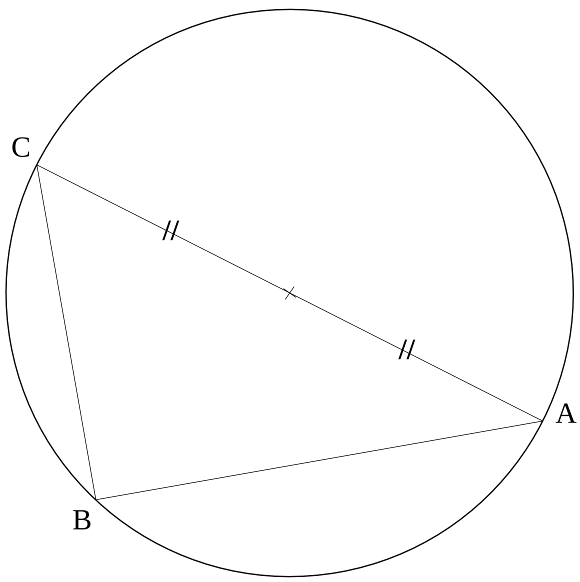
(NM) // (KL)

AK = 8 et AM = 5

KL = 6 et AL = 12

1°) Les droites (MK) et (NL) sont sécantes en A Si (NM) // (KL) Alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{AM}{AK} = \frac{AN}{AL} = \frac{MN}{KL}$. Je remplace : $\frac{5}{8} = \frac{AN}{12} = \frac{MN}{6}$ AN = $\frac{5 \times 12}{8}$ et MN = $\frac{5 \times 6}{8}$ AN = 7,5 cm et MN = 3,75 cm.	2°) a) Les points A, I, K d'une part et A, J, L d'autre part sont alignés dans le même ordre. $\frac{AI}{AK} = \frac{3}{8}$ et $\frac{AJ}{AL} = \frac{4,5}{12}$ $\frac{3}{8}$? $\frac{4,5}{12}$ $3 \times 12 = 8 \times 4,5 = 36$ donc $\frac{3}{8} = \frac{4,5}{12}$ et ainsi $\frac{AI}{AK} = \frac{AJ}{AL}$ Alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.	b) Les droites (MK) et (NL) sont sécantes en A Si (IJ) // (KL) : Alors d'après le théorème de Thalès : $\frac{AI}{AK} = \frac{AJ}{AL} = \frac{IJ}{KL}$. Je remplace : $\frac{3}{8} = \frac{4,5}{12} = \frac{IJ}{6}$ IJ = $\frac{3 \times 6}{8}$ et IJ = 2,25 cm.

EXERCICE 2 :

1°) Figure ci-contre avec AB = 6 cm ; BC = 4,5 cm et AC = 7,5 cm. 2°) Le plus grand côté est [AC] avec $AC^2 = 7,5^2 = 56,25$; d'autre part on a $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 4,5^2$ $AB^2 + BC^2 = 36 + 20,25 = 56,25$ Ainsi $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B. 3°) Le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en B a pour diamètre l'hypoténuse [AC] ; son centre est situé au milieu de l'hypoténuse [AC] et son rayon vaut $\frac{7,5}{2}$ cm = 3,75 cm. 4°) Tan A = $\frac{\text{Opposé à A}}{\text{Adjacent à A}}$ Tan A = $\frac{BC}{AB} = \frac{4,5}{6} = \frac{3}{4}$ (valeur exacte)	Avec la machine A = $\tan^{-1}(\frac{3}{4}) \ll 36,869\,897\,65…°$ A $\ll$ 37° arrondi à 1° près. 

<u>SOLUTION : TROISIEME PARTIE</u>

1°) La figure <u>complète</u> est réalisée ci-contre.

2°) Puisque (AE) est la tangente au cercle ($\mathcal{C}$) en E on a $\widehat{AEO} = 90°$ et le triangle <u>OEA est rectangle en E</u>.

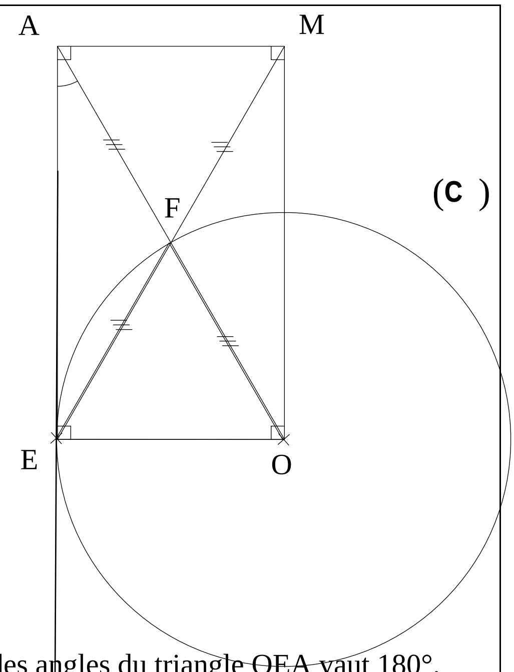
3°) Puisque le triangle OEF est équilatéral, chacun de ses angles mesure 60° ; le point A est situé sur la droite (OF) donc $\widehat{AOE} = \widehat{FOE} = 60°$.
Dans le triangle OEA rectangle en E on a

$\cos \widehat{AOE} = \dfrac{\text{Adjacent à } \widehat{AOE}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{OE}{OA}$; le point E est sur le cercle de centre O et rayon 3 cm : OE = 3 cm

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{OA}$ donne $OA = \dfrac{3 \times 2}{1}$

<u>OA = 6 cm</u>.
Puisque les points O, F et A sont alignés dans cet ordre, on a AF = OA – OF = 6 cm – 3 cm = 3cm ; ainsi F est sur le segment [OA] avec OF = AF donc F <u>est le milieu</u> du segment [OA].

4°) Le triangle OEA rectangle en E ; d'après le théorème de Pythagore on a :
$OE^2 + EA^2 = OA^2$
$3^2 + EA^2 = 6^2$
$EA^2 = 36 – 9 = 27$
$EA = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3}$
<u>$EA = 3\sqrt{3}$ cm</u>.



5°) La somme des angles du triangle OEA vaut 180°.

D'après 2°) $\widehat{AEO} = 90°$ et 3°) $\widehat{AOE} = 60°$;

$\widehat{EAO} + 60° + 90° = 180°$ donc $\widehat{EAO} = 30°$.
Dans le triangle OEA rectangle en E on a :

$\sin 30° = \sin \widehat{EAO} = \dfrac{\text{Opposé à } \widehat{EAO}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{OE}{OA}$

Ainsi d'après 3°) $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \cos \widehat{EAO} = \dfrac{\text{Adjacent à } \widehat{EAO}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{EA}{OA}$ Ainsi d'après 3°) et 4°) $\cos 30° = \dfrac{3\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

6°) Le point M, image de E par la symétrie de centre F est placé sur la figure ci-dessus.

7°) Puisque M est le symétrique de E par rapport au point F on déduit que F est le milieu du segment [EM] ; d'après 3°) nous savons que F est aussi le milieu du segment [OA] : ainsi les deux segments [EM] et [OA] ont le même milieu F et le quadrilatère <u>AEOM est un parallélogramme</u>.

D'après 2°) nous savons que OEA est rectangle en E donc le parallélogramme AEOM possède au moins un angle droit : <u>AEOM est un rectangle</u>.

8°) D'après 7°) le quadrilatère AEOM est un rectangle donc :

P(AEOM)	= 2 × (longueur + largeur)	**A(AEOM)**	= longueur × largeur
	= 2 × (EA + EO)		= EA × EO
	= 2 × ($3\sqrt{3}$ + 3)		= $3\sqrt{3} \times 3$
<u>P(AEOM)</u>	**<u>= ($6\sqrt{3}$ + 6) cm</u>**	**<u>A(AEOM)</u>**	**<u>= $9\sqrt{3}$ cm²</u>**

Barème proposé (la fraction A du I ex 1 a été supprimée du sujet)

Partie I		**Partie II**			**Partie III**			
Ex 1	**3**	**Ex 1**		**7**	**Problème**			**12**
Alg Euclide	0,5	1°)	Config + Thalès	1	1°)	Fig (sans le pt M)		1
Pgcd	1,5		Rapports	0,5				
Simpl	1		AN = et MN = 1,5		2°)	Rect en E		1
Ex 2	**3**	2°)			3°)	Angle		0,5
		a)	Ordre	0,5		OA = 6 cm		1
Trois fois	1		Rapports	1		Milieu de [OA]		1
			Egalité	2				
Ex 3	**2,5**		Réciproque	0,5	4°)	Pyth		0,5
						calc $\sqrt{27}$		1
a)	1,5	b)	Config + Thalès	1		résult $3\sqrt{3}$		0,5
b)	1		Rapports	0,5				
			IJ	0,5	5°)	Règle + 30°		1
Ex 4	**3,5**					Sin et cos		1,5
		Ex 2		**5**				
a)	1				6°)	M placé		0,5
b)	1,5	1°)	Fig	0,5				
c)	1	2°)	Carrés, =, Récip Pyt	1,5	7°)	Parall, Rect		1,5
		3°)	Milieu, rayon	1				
		4°)	Valeur tangente 1	Angle	8°)	Périm, aire		1
		et arrondi 1						
		Total		**12**				
Total	**12**				**Total**			**12**
					+ Présentation		**4**	