Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (4 points).
L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIÈRE PARTIE : ACTIVITÉS NUMÉRIQUES *(12 points)*

Exercice 1 *(3 points)*

1/ Ecrire sous la forme a $\sqrt{5}$ avec *a* entier relatif :

$$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45} \qquad \text{et} \qquad B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$$

2/ En utilisant les résultats de la question 1, démontrer que $A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

Exercice 2 *(3 points)*

1/ Effectuer le calcul ci-dessous et donner P sous forme de fraction irréductible :

$$P = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right)$$

2/ Un propriétaire terrien a vendu le quart de sa propriété en 2001 et les quatre cinquièmes <u>du reste</u> en 2002.

a/ Quelle fraction de la propriété a été vendue en 2002 ?

b/ Quelle fraction de la propriété reste invendue à l'issue des deux années ?

c) Quelle était la superficie de la propriété sachant que la partie invendue au bout des deux années représente six hectares ?

Exercice 3 *(3 points)*

On considère l'expression E : $E = (2x + 1)^2 - 4$

1/ Développer et réduire l'expression E.

2/ Factoriser l'expression E sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.

3/ Calculer E lorsque x vaut $-\frac{3}{2}$ puis lorsque x vaut 0.

Exercice 4 *(3 points)*

On donne la fraction $F = \frac{2\,717}{3\,211}$; est-elle est irréductible (justifier la réponse) ? Si ce n'est pas le cas, l'écrire sous forme irréductible.

COLLEGE MAX BRAMERIE DE LA FORCE		
Temps alloué : **2H**	Coefficient : **2**	BREVET BLANC
Epreuve : **Mathématiques**		Date : **9 février 2004**
Ce sujet comporte : **3 pages**		Série collège : **1/3**

DEUXIÈME PARTIE : ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES *(12 points)*

Exercice 1 *(6 points)*

(C) est un cercle de centre O et de rayon 5 cm ; le segment [AB] est un diamètre du cercle (C).
M est un point du cercle (C) tel que AM = 4 cm ; P est le point du segment [AB] tel que AP = 7 cm et R est le point de la demi droite [AM) tel que AR = 5,6 cm.

1/ Construire une figure précise.

2/ a/ Quelle est la nature du triangle AMB ? Justifier.

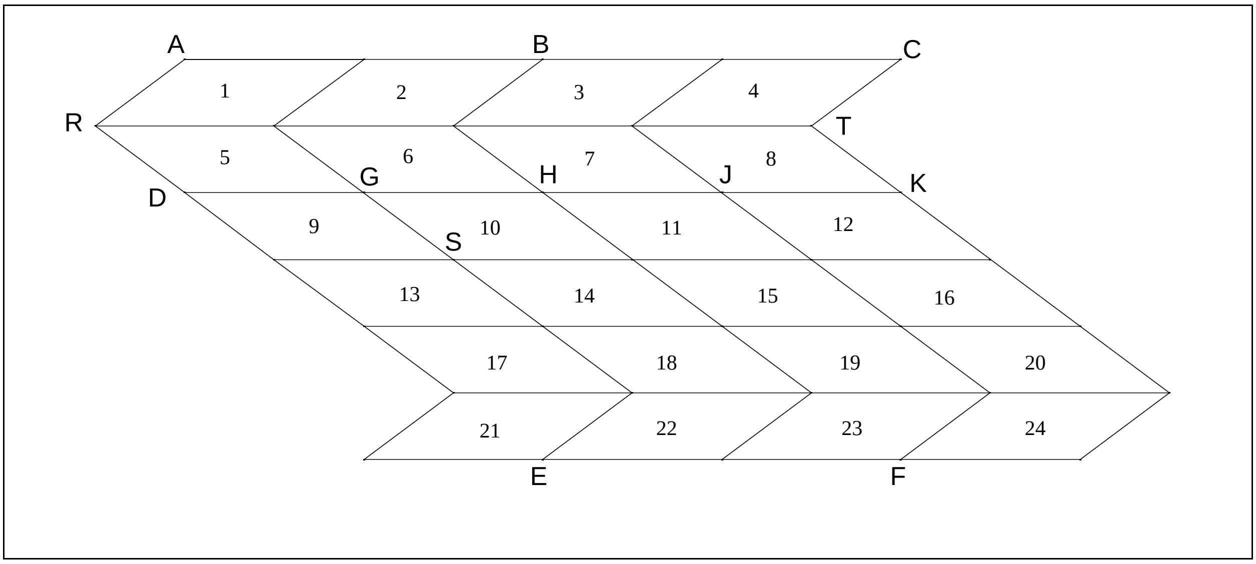
b/ Calculer la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{MAB}$.

En déduire la mesure arrondie au degré de l'angle $\widehat{MBA}$.

3/ Les droites (OM) et (PR) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

Exercice 2 *(6 points*

On a représenté ci-dessous des parallélogrammes tous superposables numérotés de 1 à 24.



*Quelle est <u>la</u> réponse correcte (**a**, **b**, **c** ou **d**) pour chacune des six **questions** ci-dessous ? <u>On ne demande pas de justifier.</u>*
<u>Barème particulier pour cet exercice</u> : réponse juste : 1 point ; réponse fausse : - 0,5 point ; aucune réponse : 0 point.
La note attribuée à cet exercice sera égale au total des points ainsi obtenus s'il est positif et à zéro sinon.

<u>Sur la copie, il suffira de reproduire et compléter le tableau suivant :</u>

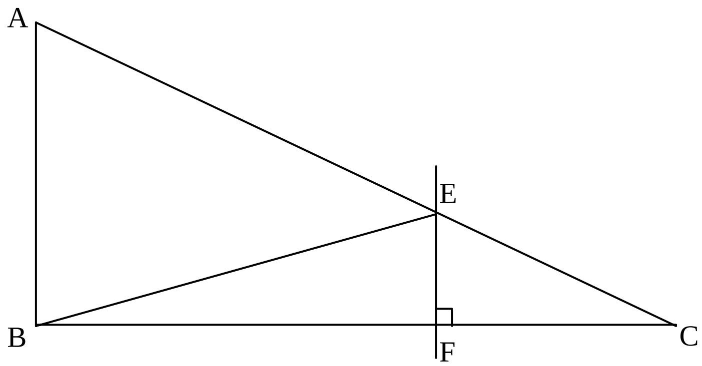
Question	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse choisie						

N°	*Question*	*a*	*b*	*c*	*d*
1	$\overrightarrow{AB}$ est égal à …	$\overrightarrow{CB}$	$\overrightarrow{DG}$	$\overrightarrow{EF}$	$\overrightarrow{DB}$
2	L'image du parallélogramme n°1 par la symétrie de centre S est …	n°21	n°3	n°24	n°22
3	L'image du parallélogramme n°10 par la translation de vecteur $\overrightarrow{GS}$ est …	n°15	n°14	n°18	n°6
4	Le parallélogramme n°2 a pour image le n°6 par …	la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$	la symétrie d'axe (RT)	la translation de vecteur $\overrightarrow{DG}$	la translation de vecteur $\overrightarrow{RD}$
5	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$ est égal à …	$\overrightarrow{AH}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{HA}$
6	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}$ est égal à …	$\overrightarrow{AH}$	$\overrightarrow{AG}$	$\overrightarrow{AJ}$	$\overrightarrow{AK}$

TROISIÈME PARTIE : QUESTIONS ENCHAINÉES *(12 points)*

La figure ci-dessous est donnée à titre indicatif pour préciser la disposition des points. Ce n'est pas une figure en vraie grandeur. On <u>ne demande pas</u> de la refaire.

ABC est un triangle tel que AC = 20 cm, BC = 16 cm et AB = 12 cm.
F est un point du segment [BC].
La perpendiculaire à la droite (BC) passant par F coupe [AC] en E.
On a représenté sur la figure le segment [BE].



Partie A

1/ Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2/ Calculer l'aire $\mathcal{A}$(ABC) du triangle ABC.

Partie B

On se place dans le cas où CF = 4 cm.
1/ Démontrer que EF = 3 cm.

2/ Calculer l'aire $\mathcal{A}$(EBC) du triangle EBC.

Partie C

On se place dans le cas où F est un point quelconque du segment [BC], distinct de B et de C.
Dans cette partie, on pose CF = x (x étant un nombre tel que $0 < x < 16$).

1/ Montrer que la longueur EF, exprimée en cm, est égale à $\frac{3}{4}x$.

2/ Montrer que l'aire du triangle EBC, exprimée en cm², est égale à $6x$.

3/ Pour quelle valeur de x l'aire du triangle EBC est-elle égale à 33 cm² ?

<u>SOLUTION</u> : ACTIVITÉS NUMÉRIQUES *(12 points)*

Exercice 1 (3 points)

1/ (1 pt) $A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$ $A = 3\sqrt{4 \times 5} + \sqrt{9 \times 5}$ $A = 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{5} + \sqrt{9} \times \sqrt{5}$ $A = 3 \times 2 \times \sqrt{5} + 3 \times \sqrt{5}$ $A = (6 + 3) \times \sqrt{5}$ $A = 9\sqrt{5}$	(1 pt) $B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$ $B = \sqrt{36 \times 5} - 3\sqrt{5}$ $B = \sqrt{36} \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ $B = 6 \times \sqrt{5} - 3\sqrt{5}$ $B = (6 - 3) \times \sqrt{5}$ $B = 3\sqrt{5}$	2/ (0,5 + 0,5 pt) $A \times B = 9\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$ $A \times B = 9 \times 3 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}$ $A \times B = 27 \times 5$ $A \times B = 135$ $\frac{A}{B} = \frac{9\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{9}{3} = 3$

Exercice 2 (3 points)

1/ $P = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3 \times 4}{4 \times 5}\right) = 1 - \left(\frac{1 \times 5}{4 \times 5} + \frac{12}{20}\right)$ $P = 1 - \left(\frac{5}{20} + \frac{12}{20}\right) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{20}{20} - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$; $P = \frac{3}{20}$ (1 pt) 2/ a/ Le quart de la propriété est vendu en 2001 alors il en reste $\frac{3}{4}$; la partie vendue en 2002 est quatre cinquièmes de trois quarts c'est-à-dire $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ (0,5 pt) La fraction de la propriété vendue en 2002 est $\frac{3}{5}$ 2/ b/ Toute la propriété peut s'écrire 1 et alors la fraction	de la propriété invendue à l'issue des deux années s'écrit sous la forme de l'expression P de la question 1/ et nous savons $P = \frac{3}{20}$ La fraction de la propriété invendue à l'issue des deux années est $\frac{3}{20}$ (0,5 pt) 2/ c/ Soit x la superficie en hectare de toute la propriété : $x \times \frac{3}{20} = 6$ donne $x = \frac{6 \times 20}{3} = 40$ La superficie de toute la propriété était de quarante hectares. (1 pt)

Exercice 3 (3 points)

1/ $E = (2x + 1)^2 - 4$ $E = (4x^2 + 4x + 1) - 4$ $E = 4x^2 + 4x + 1 - 4$ $E = 4x^2 + 4x - 3$ (1 pt) 2/ $(2x + 1)^2 - 2^2$ $E = [(2x + 1) + 2][(2x + 1) - 2]$ $E = (2x + 1 + 2)(2x + 1 - 2)$ $E = (2x + 3)(2x - 1)$ (1 pt)	3/ D'après la réponse 2/ si $x = -\frac{3}{2}$ on obtient : $E = [2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 3] \times [(2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 1] = (-3 + 3) \times (-3 - 1)$ $E = 0 \times (-4) = 0$ $E = 0$ (0,5 pt) D'après la réponse 1/ si $x = 0$ on obtient : $E = 4 \times 0^2 + 4 \times 0 - 3 = 0 + 0 - 3$ $E = -3$ (0,5 pt)

Exercice 4 *(3 points)*

Pour savoir si la fraction F est irréductible on peut calculer le PGCD de son numérateur et de son dénominateur avec <u>l'algorithme d'Euclide</u> :

$3\,211 = 2\,717 \times 1 + 494$

$2\,717 = 494 \times 5 + \boxed{247}$

$494 = 247 \times 2 + 0$

Le dernier reste non nul (encadré) est le PGCD donc : $\boxed{\text{PGCD } (3\,211 ; 2\,717) = 247}$ (1 pt)

Le PGCD du numérateur et dénominateur de F est égal à 247 ; $247 \neq 1$; 3 211 et 2 717 ne sont pas premiers entre eux : la fraction F <u>n'est pas irréductible.</u> (1 pt)

Puisque leur plus grand diviseur commun est 247, on rend F irréductible en la simplifiant par 247 :

$F = \frac{2\,717 \div 247}{3\,211 \div 247} = \frac{11}{13}$ (forme irréductible) (1 pt)

<u>SOLUTION : ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES</u> *(12 POINTS)*

Exercice 1 *(6 points)*

1/ La figure est réalisée ci-contre en vraie grandeur avec P situé sur le segment [AB] à 7 cm de A et R situé sur la demi droite [AM) à 5,6 cm de A. (0,5 pt)

2/ a/ Puisque le triangle AMB est inscrit dans le cercle (C) de diamètre [AB], il est rectangle en M. (1 pt)

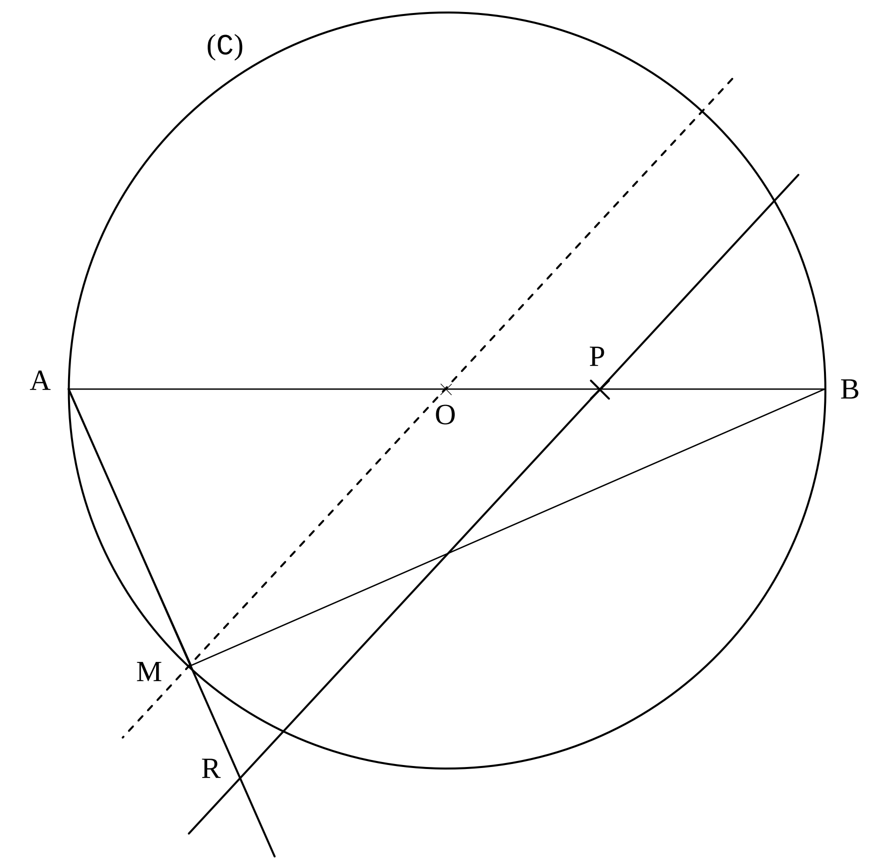
2/ b/ Puisque le triangle AMB est rectangle en M, on peut utiliser la relation $\cos \widehat{MAB} = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10}$ et à la calculatrice $\cos^{-1}\left(\frac{4}{10}\right) = 66{,}42\ldots$

La mesure de $\widehat{MAB}$ arrondie au degré est 66°. (1,5 pts)

Puisque $\widehat{MBA}$ est l'angle complémentaire de $\widehat{MAB}$ dans le triangle rectangle ABC, on a

$\widehat{MBA} = 90° - 66° = 24°$

La mesure de $\widehat{MBA}$ arrondie au degré est 24°. (1 pt)



3/ D'une part : $\frac{AM}{AR} = \frac{4}{5{,}6}$ et d'autre part : $\frac{AO}{AP} = \frac{5}{7}$; puisque $4 \times 7 = 5{,}6 \times 5 = 28$, on a $\frac{4}{5{,}6} = \frac{5}{7}$ c'est-à-dire $\frac{AM}{AR} = \frac{AO}{AP}$; ainsi $\frac{AM}{AR} = \frac{AO}{AP}$ avec les points A, M et R alignés dans <u>le même ordre</u> que les points A, O et P alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (OM) et (PR) sont parallèles. (2 pts)

Exercice 2 *(6 points)*

Déterminer quelle est <u>la</u> réponse correcte (a, b, c ou d) pour chacune des six questions. <u>Ici, on ne demande pas de justifier.</u>
<u>Barème particulier pour cet exercice</u> : réponse juste : 1 point ; réponse fausse : - 0,5 point ; aucune réponse : 0 point.
La note attribuée à cet exercice sera égale au total des points ainsi obtenus s'il est positif et à zéro sinon.

<u>Sur la copie, reproduire et compléter le tableau suivant :</u>

Question	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse choisie	**c**	**d**	**b**	**b**	**a**	**c**

<u>SOLUTION</u> : QUESTIONS ENCHAÎNÉES *(12 POINTS)*

ABC est un triangle tel que
AC = 20 cm, BC = 16 cm et AB = 12 cm.
F est un point du segment [BC].
La perpendiculaire à la droite (BC) passant par F coupe [CA] en E.

Partie A (2 + 2 pts)
1/ $20^2 = 400$; $16^2 = 256$; $12^2 = 144$
$400 = 256 + 144$ donc $AC^2 = BC^2 + AB^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

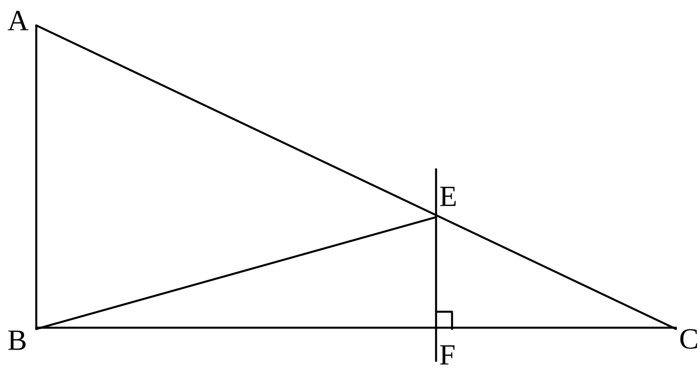
2/ Puisque le triangle ABC est rectangle en B, $\mathcal{A}(ABC) = \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{12 \times 16}{2} = 96$
L'aire du triangle ABC vaut 96 cm^2.

Partie B (1 + 2 + 2 pts)
On se place dans le cas où CF = 4 cm

1/ Puisque le triangle ABC est rectangle en B, les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.
Puisque la perpendiculaire à la droite (BC) passant par F coupe [CA] en E, les droites (EF) et (BC) sont perpendiculaires.
Deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles donc (EF) // (AB). (1 pt)

Les droites (AE) et (BF) sont sécantes en C avec (AB) // (EF) ; d'après le théorème de Thalès, $\dfrac{CF}{BC} = \dfrac{CE}{AC} = \dfrac{EF}{AB}$ c'est-à-dire :
$\dfrac{4}{16} = \dfrac{EF}{12}$ et $EF = \dfrac{4 \times 12}{16} = 3$
Ainsi EF = 3 cm. (2 pts)

2/ Puisque la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (BC) et passe par le sommet E du triangle EBC, c'est la hauteur relative à [BC] et $\mathcal{A}(EBC) = \dfrac{EF \times BC}{2} = \dfrac{3 \times 16}{2} = 24$
L'aire du triangle EBC vaut 24 cm^2. (2 pts)



Partie C (1 + 1 + 1 pts)

On se place dans le cas où F est un point quelconque du segment [BC], distinct de B et de C.
Dans cette partie, on pose CF = x (x étant un nombre tel que $0 < x < 16$).

1/ D'après la **Partie B**, en remplaçant la valeur 4 de CF par x, on obtient $EF = \dfrac{x \times 12}{16} = \dfrac{x \times 3}{4} = \dfrac{3}{4}x$
Dans ce cas, la valeur de EF exprimée en cm vaut $\dfrac{3}{4}x$.

2/ D'après la **Partie B**, en remplaçant la valeur 3 de EF par $\dfrac{3}{4}x$, on obtient $\mathcal{A}(EBC) = \dfrac{\frac{3}{4}x \times 16}{2} = \dfrac{3}{4}x \times 8 = 6x$.
L'aire du triangle EBC, exprimée en cm^2, est égale à $6x$.

3/ D'après la question 2/ de cette partie, l'aire du triangle EBC vaut $6x$; elle doit être égale à 33 cm^2 :
$6x = 33$, c'est-à-dire
$x = \dfrac{33}{6} = 5{,}5$
L'aire du triangle EBC est égale à 33 cm^2 lorsque la valeur de x est 5,5.

Autre solution pour la question 1/ de la **Partie B** en utilisant la <u>trigonométrie</u> :

Puisque F est un point du segment [BC] et la perpendiculaire à la droite (BC) passant par F coupe [CA] en E, le triangle EFC est rectangle en F et l'angle $\widehat{ECF}$ vaut l'angle $\widehat{ACB}$.
Puisque les deux triangles EFC et ABC sont rectangles, $\tan \widehat{ECF} = \dfrac{EF}{CF} = \dfrac{EF}{4}$ et $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{12}{16}$.

Ainsi $\dfrac{EF}{4} = \dfrac{12}{16}$ et $EF = \dfrac{4 \times 12}{16} = 3$ et la valeur de EF = 3 cm.