Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (4 points).
L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIÈRE PARTIE

ACTIVITÉS NUMÉRIQUES (12 POINTS)

Exercice 1

Dire en justifiant, si la fraction A est irréductible. Si ce n'est pas le cas, l'écrire sous forme irréductible.

$$A = \frac{7\,797}{4\,407}$$

Exercice 2

Calculer B et C et présenter les résultats sous forme de fractions irréductibles :

$$B = \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \div \frac{7}{6} \qquad C = \frac{5 \times 10^8 \times 6 \times 10^3}{2 \times (\ 10^4\ )^3}$$

Exercice 3

a) Ecrire l'expression D sous la forme a $\sqrt{b}$ avec a entier relatif et b entier le plus petit possible :
$D = \sqrt{27} + \sqrt{75} - 12\sqrt{3}$

b) A l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de E :
$E = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$

Exercice 4

Soit $F = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(-5x + 7)$

a) Développer et réduire F.

b) Factoriser F.

c) Résoudre l'équation $(2x - 3)(7x - 10) = 0$

COLLEGE MAX BRAMERIE DE LA FORCE		
Temps alloué : **2H**	Coefficient : **2**	BREVET BLANC
Epreuve : **Mathématiques**		Date : **1er février 2005**
Ce sujet comporte : **3 pages**		Série collège : **1/3**

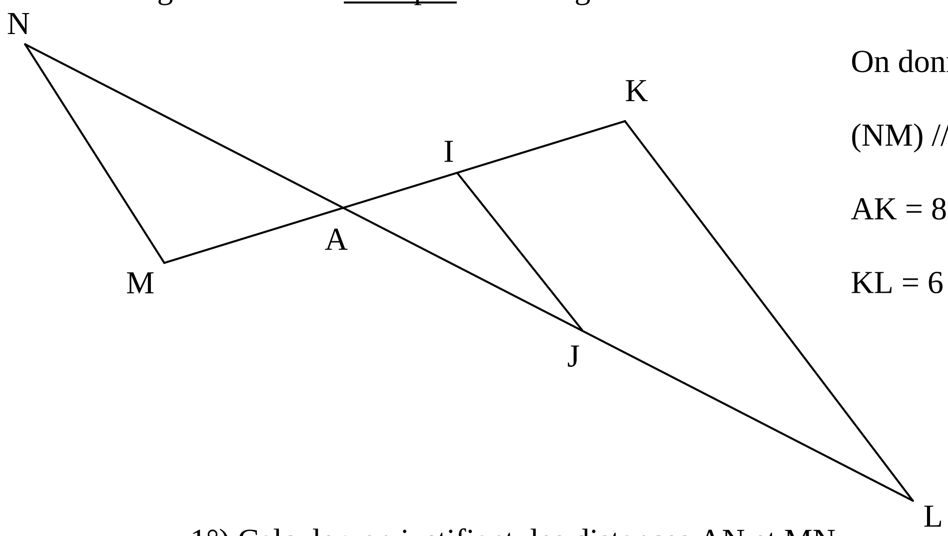
DEUXIÈME PARTIE

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES (12 POINTS)

Exercice 1

On ne demande pas de refaire la figure ; l’unité est centimètre.

La figure ci-contre n’est pas en vraie grandeur.



On donne :

(NM) // (KL)

AK = 8 et AM = 5

KL = 6 et AL = 12

1°) Calculer, en justifiant, les distances AN et MN.

2°) Les points I et J sont tels que AI = 3 et AJ = 4,5.

a) Prouver que (IJ) // (KL).

b) Calculer IJ.

Exercice 2

1°) Construire un triangle ABC tel que :

AB = 6 cm ; BC = 4,5 cm et AC = 7,5 cm.

2°) Démontrer que ABC est un triangle rectangle.

3°) Préciser la position du centre du cercle circonscrit au triangle ABC ainsi que la mesure de son rayon ; justifier.

4°) Calculer tan $\widehat{A}$ puis donner l’arrondi, au degré près, de la mesure de l’angle $\widehat{A}$.

TROISIÈME PARTIE

QUESTIONS ENCHAÎNÉES (12 POINTS)

Il sera porté une attention particulière à la précision et la propreté de la figure qui sera réalisée au crayon à papier et éventuellement avec des crayons de couleurs.(Feutres et stabylos interdits)

1°) Construire un cercle ($\mathcal{C}$) de centre O et de rayon 3 cm.

Placer sur ce cercle deux points E et F tels que le triangle OEF soit équilatéral.

Tracer la perpendiculaire à la droite (OE) passant par E ; elle coupe la droite (OF) en un point

A qu'il ne faut pas oublier de placer sur la figure.

Recopier <u>sur la copie</u> en complétant : la droite (AE) est la .... au cercle ($\mathcal{C}$) en .... .

Puis donner en la justifiant la nature du triangle OEA.

2°) Justifier que la mesure de l'angle $A\hat{O}E$ est 60°. En utilisant cos 60°, calculer

la distance OA. En déduire que F est le milieu du segment [AO].

3°) Calculer la valeur exacte de EA et l'exprimer sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont

des nombres entiers, b étant le plus petit possible.

4°) Placer sur la figure le point M, image de E par la symétrie de centre F.

5°) Quelle est la nature du quadrilatère AEOM ? Justifier la réponse.

6°) Construire le point H, tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$, puis donner en la justifiant

la nature du quadrilatère OEHF.

SOLUTION : PREMIÈRE PARTIE

Exercice 1

On peut rechercher le PGCD du numérateur et dénominateur.

L'algorithme d'Euclide donne :

$7\,797 = 4\,407 \times 1 + 3\,390$

$4\,407 = 3\,390 \times 1 + 1\,017$

$3\,390 = 1\,017 \times 3 + \boxed{339}$

$1\,017 = 339 \times 3 + 0$

Le dernier reste non nul (encadré) est le PGCD donc : $\boxed{\text{PGCD } (7\,797\,;\,4\,407) = 339}$

Le PGCD du numérateur et dénominateur est égal à 339 ; ils ne sont pas premiers entre eux et leur plus grand diviseur commun est 339.

La fraction A <u>n'est pas irréductible</u> ; on peut la simplifier par 339 :

$A = \dfrac{7\,797}{4\,407} = \dfrac{7\,797 \div 339}{4\,407 \div 339} = \boxed{\dfrac{23}{13}}$ (forme irréductible)

Exercice 2

$B = \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{3}\right) \div \dfrac{7}{6}$

$B = \left(\dfrac{9}{12} - \dfrac{8}{12}\right) \times \dfrac{6}{7}$

$B = \dfrac{1}{12} \times \dfrac{6}{7}$

$B = \dfrac{1 \times 6}{2 \times 6 \times 7}$

$B = \dfrac{1}{14}$ (forme irréductible)

$C = \dfrac{5 \times 10^8 \times 6 \times 10^3}{2 \times (\,10^4\,)^3}$

$C = \dfrac{30}{2} \times \dfrac{10^{11}}{10^{12}}$

$C = 15 \times \dfrac{1}{10}$

$C = \dfrac{3 \times 5}{2 \times 5}$

$C = \dfrac{3}{2}$ (forme irréductible)

Exercice 3

$D = \sqrt{27} + \sqrt{75} - 12\sqrt{3}$

$D = \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{25 \times 3} - 12 \times \sqrt{3}$

$D = \sqrt{9} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3} - 12 \times \sqrt{3}$

$D = 3 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3} - 12 \times \sqrt{3}$

$D = (3 + 5 - 12) \times \sqrt{3}$

$D = (-4) \times \sqrt{3}$

$D = -4\sqrt{3}$

Avec la calculatrice on lit

$(\sqrt{6} + \sqrt{3}) \div (\sqrt{7} + \sqrt{3}) \ll 0{,}955 \ldots$

Alors

$E \ll 0{,}96$ arrondi à 10^{-2} près.

Exercice 4

a) $F = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(-5x + 7)$

$F = [(2x)^2 - 2 \times (2x) \times 3 + 3^2] - [-10x^2 + 14x + 15x - 21]$

$F = [4x^2 - 12x + 9] - [-10x^2 + 29x - 21]$

$F = 4x^2 - 12x + 9 + 10x^2 - 29x + 21$

$F = 14x^2 - 41x + 30$

b) $F = (2x - 3)^2 - (2x - 3)(-5x + 7)$

$F = (2x - 3)(2x - 3) - (2x - 3)(-5x + 7)$

$F = (2x - 3)[(2x - 3) - (-5x + 7)]$

$F = (2x - 3)(2x - 3 + 5x - 7)]$

$F = (2x - 3)(7x - 10)$

c) $(2x - 3)(7x - 10) = 0$

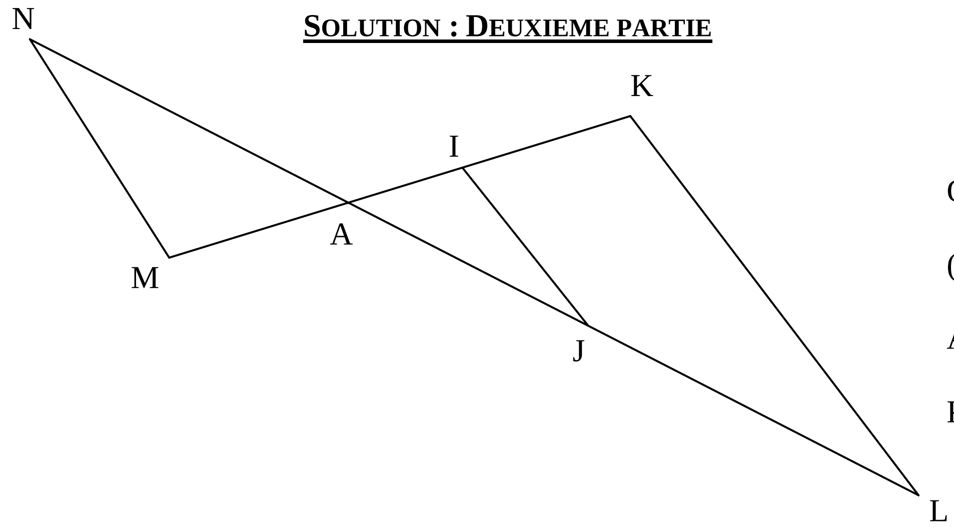
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

$2x - 3 = 0$ ou bien $7x - 10 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{10}{7}$ Cette équation admet deux solutions $\dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{10}{7}$.

SOLUTION : DEUXIEME PARTIE

Exercice 1



On donne :

(NM) // (KL)

AK = 8 et AM = 5

KL = 6 et AL = 12

1°) Puisque les droites (MK) et (NL) sont sécantes en A avec (NM) // (KL), d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AM}{AK} = \frac{AN}{AL} = \frac{MN}{KL}$.
En remplaçant $\frac{5}{8} = \frac{AN}{12} = \frac{MN}{6}$

AN = $\frac{5 \times 12}{8}$ et MN = $\frac{5 \times 6}{8}$
AN = 7,5 cm et MN = 3,75 cm

2°) a) Les points A, I, K d'une part et A, J, L d'autre part sont alignés dans le même ordre.

$\frac{AI}{AK} = \frac{3}{8}$ et $\frac{AJ}{AL} = \frac{4,5}{12}$
$\frac{3}{8}$? $\frac{4,5}{12}$
3 × 12 = 8 × 4,5 = 36 donc
$\frac{3}{8} = \frac{4,5}{12}$ et ainsi $\frac{AI}{AK} = \frac{AJ}{AL}$
D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

b) Puisque les droites (IK) et (JL) sont sécantes en A avec (IJ) // (KL), d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AI}{AK} = \frac{AJ}{AL} = \frac{IJ}{KL}$.
En remplaçant : $\frac{3}{8} = \frac{4,5}{12} = \frac{IJ}{6}$

IJ = $\frac{3 \times 6}{8}$ et IJ = 2,25 cm

Exercice 2

1°) Figure ci-contre avec AB = 6 cm ; BC = 4,5 cm et AC = 7,5 cm.

2°) Le plus grand côté est [AC] avec $AC^2 = 7,5^2 = 56,25$; d'autre part on a $AB^2 + BC^2 = 6^2 + 4,5^2$
$AB^2 + BC^2 = 36 + 20,25 = 56,25$
Ainsi $AB^2 + BC^2 = AC^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

3°) Le cercle circonscrit au triangle ABC rectangle en B a pour diamètre l'hypoténuse [AC] ; son centre est situé <u>au milieu</u> de l'hypoténuse [AC] et son rayon vaut $\frac{7,5}{2}$ cm = 3,75 cm.

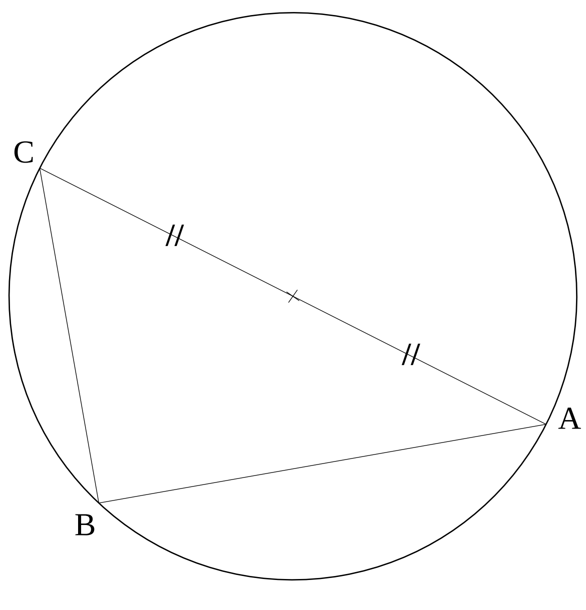
4°) Puisque d'après 2°) le triangle ABC est rectangle en B, on peut utiliser tangente :

$$\text{Tan } A = \frac{\text{Opposé à } A}{\text{Adjacent à } A}$$

Tan A = $\frac{BC}{AB} = \frac{4,5}{6} = \frac{3}{4}$ (valeur exacte)

Avec la machine A = $\tan^{-1}(\frac{3}{4}) \ll 36,869\,897\,65…°$

A $\ll$ 37° arrondi à 1° près.



SOLUTION : TROISIEME PARTIE

1°) La figure complète est réalisée ci-contre.

La droite (AE) est la **tangente** au cercle (C) en **E**.

Puisque $\widehat{AEO} = 90°$, le triangle OEA est rectangle en E.

2°) Puisque le triangle OEF est équilatéral, chacun de ses angles mesure 60° ; le point A est situé sur

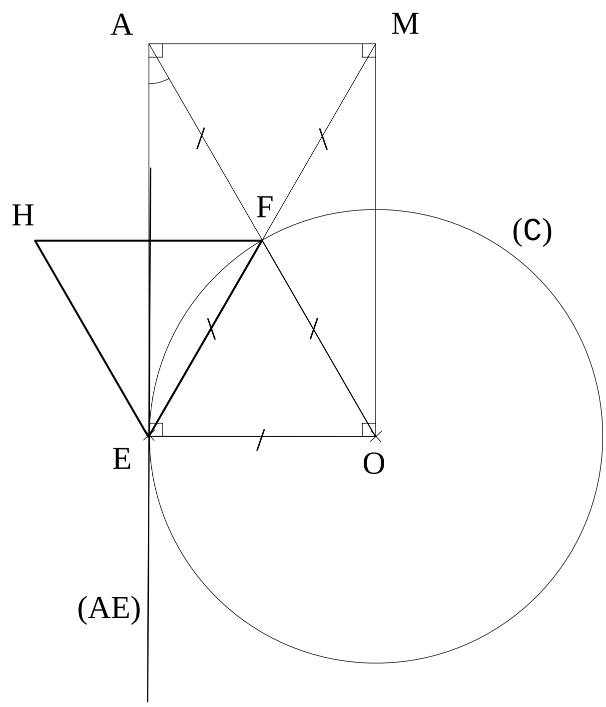
la demi-droite [OF) donc $\widehat{AOE} = \widehat{FOE} = 60°$.
Dans le triangle OEA rectangle en E on a

$\text{Cos } 60° = \dfrac{\text{Adjacent à } \widehat{AOE}}{\text{Hypoténuse}} = \dfrac{OE}{OA}$; le point E est sur le cercle de centre O et rayon 3 cm : OE = 3 cm
$\dfrac{\text{Cos } 60°}{1} = \dfrac{3}{OA}$ donne $OA = \dfrac{1 \times 3}{\cos 60°}$ et OA = 6 cm

Puisque les points O, F et A sont alignés dans cet ordre, on a AF = OA – OF = 6 cm – 3 cm = 3cm ; ainsi F est sur le segment [AO] avec OF = AF donc F est le milieu du segment [AO].

3°) Le triangle OEA rectangle en E ; d'après le théorème de Pythagore on a :
$OE^2 + EA^2 = OA^2$
$3^2 + EA^2 = 6^2$
$EA^2 = 36 - 9 = 27$
$EA = \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3 \times \sqrt{3}$
$EA = 3\sqrt{3}$ cm.

4°) Le point M, image de E par la symétrie centrale de centre F signifie que F est le milieu du segment [ME].



5°) Puisque M est le symétrique de E par rapport au point F on déduit que F est le milieu du segment [ME] ; d'après 2°) nous savons que F est aussi le milieu du segment [OA] : ainsi les deux segments [EM] et [OA] ont le même milieu F et le quadrilatère AEOM est un parallélogramme.

D'après 1°) nous savons que OEA est rectangle en E donc le parallélogramme AEOM possède au moins un angle droit : AEOM est un rectangle.

6°) L'égalité $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE}$ signifie que [OH] est une diagonale du parallélogramme OEHF.

D'après 1°) nous savons que OEF est équilatéral donc le parallélogramme OEHF possède au moins deux côtés consécutifs [OE] et [OF] de même mesure : OEHF est un losange.

Barème adopté pour 2005

Partie I

Ex 1	**3**
Alg Euclide	0,5
Pgcd	1,5 (0,5 pour irr)
Simpl	1
Ex 2	**3**
Deux fois	1,5
Ex 3	**2,5**
a)	1,5
b)	1
Ex 4	**3,5**
a)	1,5
b)	1
c)	1
Total	**12**

Partie II

Ex 1		**6,5**
1°)	Config + Thalès	1
	Rapports	0,5
	AN = et MN =	1
2°)		
a)	Ordre	0,5
	Rapports	0,5
	Egalité	0,5
	Réciproque	0,5
b)	Config + Thalès	1
	Rapports	0,5
	IJ	0,5
Ex 2		**5,5**
1°)	Fig	0,5
2°)	Carrés, =, Récip Pyt	2
3°)	Milieu, rayon	1
4°)	Valeur tangente	1
	Angle et arrondi	1
Total		**12**

Partie III

Problème		**12**
1°)	Fig (sans M ni H)	1
	Phrase	0,5
	OEA rect en E	0,5
2°)	Angle	1
	OA = 6 cm	1
	Milieu de [OA]	1
3°)	Rect, Pyth	1
	Calc $\sqrt{27}$	1,5
	Résult $3\sqrt{3}$	0,5
4°)	M placé	0,5
5°)	Parall, Rect	1,5
6°)	H placé	0,5
	Parll, Losange	1,5
Total		**12**

+ Présentation **4**
selon pts travail ci-dessous :

00-09 pts	max 2
10-17 pts	max 3
18-36 pts	libre