Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la présentation (4 points).
L'usage de la calculatrice est autorisé conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

PREMIÈRE PARTIE : ACTIVITÉS NUMÉRIQUES *(12 points)*

Exercice 1

Dans chaque cas, indiquer les étapes du calcul.
1/ Calculer A et B en donnant le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \quad ; \quad B = \frac{5}{6} \div \frac{5}{9}$$

2/ Calculer C = $10 - [-2 \times (2 + (-3)) + 5]$

Exercice 2

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).
Pour chaque ligne du tableau, quatre réponses sont proposées, mais une seule est exacte.
Aucun point ne sera enlevé en cas de mauvaise réponse.
Indiquer sur votre copie, le numéro de la question et, sans justifier, recopier la réponse exacte.

		Réponses proposées			
1.	Quelle est l'expression développée de $2x(2x - 3)$?	$2x^2 - 6x$	$4x^2 - 3$	$4x^2 - 6x$	$10x^2$
2.	Quelle est l'expression factorisée de $x^2 - 100$?	$(x - 10)^2$	$(x - 10)(x + 10)$	$(x - 50)^2$	$(x - 50)(x + 50)$
3.	Quelles sont les solutions de $(x - 4)(2x + 7) = 0$?	4 et $-\frac{7}{2}$	4 et $\frac{7}{2}$	4 et $-\frac{2}{7}$	4 et $\frac{2}{7}$
4.	Quelle est la valeur exacte de $\sqrt{4 + 16}$?	10	6	$2\sqrt{5}$	4,47
5.	Le prix d'un article coûtant 1 200 € baisse de 5 % ; quel est son nouveau prix ?	60 €	1 260 €	1 195 €	1 140 €

Exercice 3

Dans cet exercice, tout début d'explication, de démarche sera pris en compte.
Voici les distances (en km) qui séparent le soleil de trois planètes du système solaire.

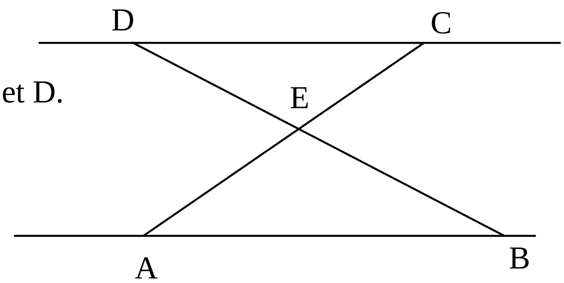
Vénus : 105×10^6 ; Mars : $2\,250 \times 10^5$; Terre : $1,5 \times 10^8$

Parmi ces trois planètes, quelle est celle qui est la plus éloignée du soleil ?
Justifier.

COLLEGE MAX BRAMERIE DE LA FORCE		
Temps alloué : **2h**	Coefficient : **2**	BREVET BLANC N°2
Épreuve : **mathématiques**		Date : **mardi 28 avril 2009**
Ce sujet comporte : **4 pages**		Série collège : **1/4**

Exercice 1

La figure ci-contre n'est pas réalisée en vraie grandeur.



Les points A, E et C sont alignés ainsi que les points B, E et D.

AE = 7,2 cm ; EC = 5,4 cm ; ED = 7,5 cm ; BE = 10 cm

1/ Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2/ Sachant que CD = 6,3 cm, calculer AB.

Exercice 2

Démontrer, pour chacune des trois figures ci-dessous, que le triangle ABC est un triangle rectangle en utilisant les informations fournies.

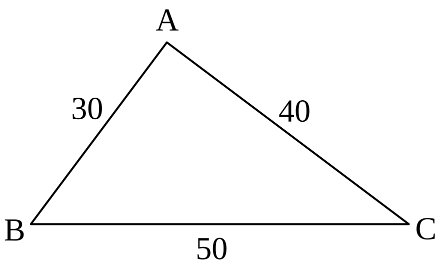
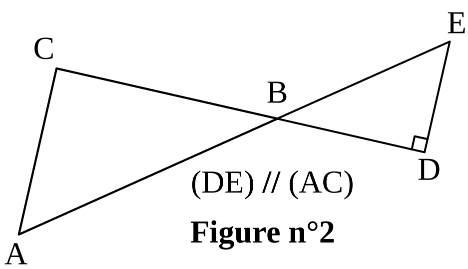


Figure n°1



(DE) // (AC)

Figure n°2

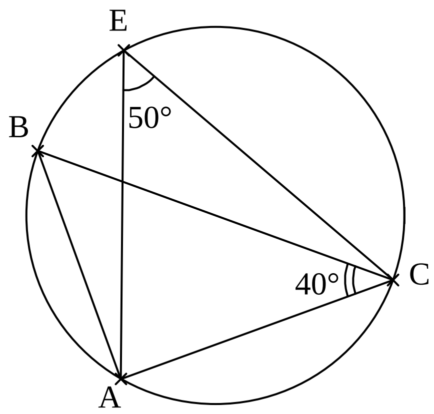


Figure n°3

Exercice 3

1/ Construire un triangle ABC rectangle en C tel que AC = 5 cm et $\widehat{BAC} = 40°$.

2/ Calculer la longueur BC. (On donnera une valeur arrondie au millimètre.)

3/ a/ Où se trouve le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC ?

3/ b/ Tracer ce cercle.

4/ En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BOC}$.

TROISIÈME PARTIE : QUESTIONS ENCHAINÉES *(12 points)*

Un viticulteur propose de livrer aux habitants des communes environnantes son excellent vin biologique (médaille d'or au plus grand concours viticole) aux tarifs suivants :

Tarif 1 : 7,5 euros le litre, transport compris.

Tarif 2 : 6 euros le litre, avec un supplément de 18 euros pour le transport.

Tarif 3 : 5 euros le litre, avec un supplément de 33 euros pour le transport.

1/ **Découper** et **coller <u>sur votre feuille double</u>**, le tableau suivant **<u>bien complété</u>** :

Nombre de litres	1	5			
Prix au *tarif 1* (en €)	7,5		75		
Prix au *tarif 2* (en €)				90	
Prix au *tarif 3* (en €)					113

2/ Exprimer le prix payé par le consommateur en fonction du nombre x de litres achetés.
Pour le *tarif 1*, le prix payé pour x litres sera noté $P_1(x)$.
Pour le *tarif 2*, le prix payé pour x litres sera noté $P_2(x)$.
Pour le *tarif 3*, le prix payé pour x litres sera noté $P_3(x)$.

3 / Tracer, sur la feuille de papier millimétré (annexe), les représentations graphiques des fonctions : $f : x \longmapsto 7{,}5x$ $g : x \longmapsto 6x + 18$ $h : x \longmapsto 5x + 33$
pour des valeurs de x comprises entre 0 et 16.
On placera l'origine dans le coin inférieur gauche de la feuille et on prendra les unités suivantes :
Sur l'axe des abscisses, 1 cm représente 1 L ;
Sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 5 €.

4/ Recopier **<u>sur la feuille double</u>** en les complétant chacune des réponses suivantes obtenues par des lectures du graphique (**<u>ne pas oublier de dessiner les pointillés et flèches utiles</u>**) :

a/ Les tarifs 1 et 2 conduisent au même prix pour **….. L** ; à ces deux tarifs, ce prix est de **… €.**

b/ Pour 13 L achetés, le tarif le plus avantageux est le tarif **...** avec le prix de **… €.**

c/ Si on dispose de 45 euros, c'est le tarif **…** qui permet d'acheter le plus grand nombre de litres ; à ce tarif, ce nombre est de **… L.**

d/ Le tarif 3 reste toujours le plus avantageux dès qu'on achète plus de **… L.**

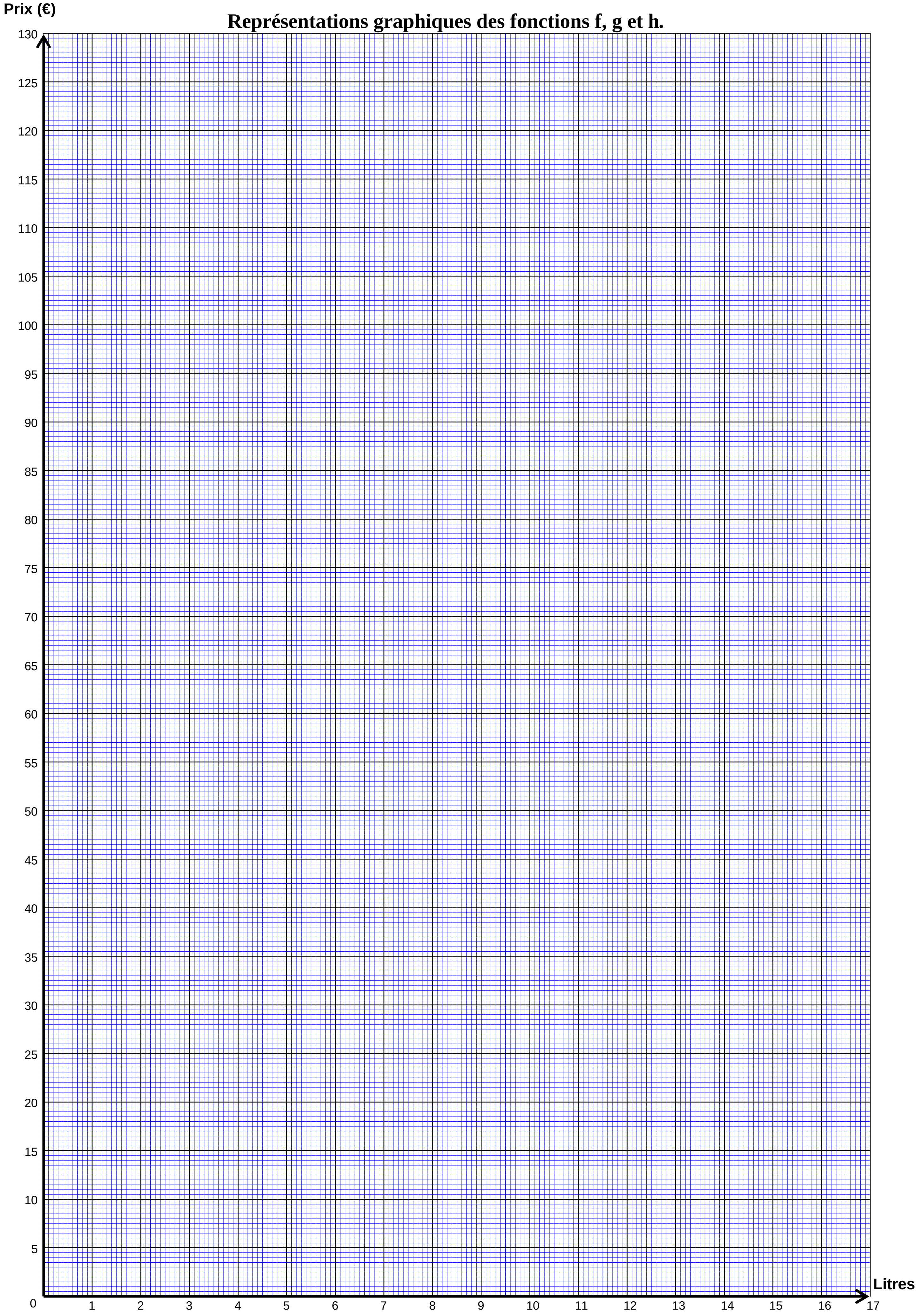
5/ Trouver, par le calcul, pour combien de litres les tarifs 2 et 3 conduisent au même prix et calculer ce prix.

6/ Le viticulteur passe livrer un ami. Il ne lui facture pas le transport et lui applique pour chaque litre 40 % de remise par rapport au tarif 1. Exprimer, en fonction de x litres achetés, ce prix $P_4(x)$.

Ce prix est-il plus avantageux que chacun des trois précédents quelle que soit la quantité achetée ? Pourquoi ?

Page 4 : à remettre complétée avec la copie : Nom : **Prénom** :

Représentations graphiques des fonctions f, g et h.



Solution : **ACTIVITÉS NUMÉRIQUES**

Exercice 1 (1 + 1 + 1,5 = 3,5 pts)

1/ $A = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$

$A = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} + \frac{3}{4}$

$A = \frac{2 + 3}{4}$

$A = \frac{5}{4}$

2/ $B = \frac{5}{6} \div \frac{5}{9}$

$B = \frac{5}{6} \times \frac{9}{5}$

$B = \frac{5 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 5}$

$B = \frac{3}{2}$

3/ $C = 10 - [-2 \times (2 + (-3)) + 5]$

$C = 10 - [-2 \times (-1) + 5]$

$C = 10 - (2 + 5)$

$C = 10 - 7$

$C = 3$

Exercice 2 (1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 pts) *Les justifications des réponses (en gras) fournies ici n'étaient pas demandées.*

1/ $2x(2x - 3) = 2x \times 2x - 2x \times 3 = \mathbf{4x^2 - 6x}$**.**

2/ $x^2 - 100 = x^2 - 10^2 = \mathbf{(x - 10)(x + 10)}$**.**

3/ $(x - 4)(2x + 7) = 0$

Si un produit est nul, alors l'un de ses facteurs au moins est nul.

$x - 4 = 0$ ou $2x + 7 = 0$

$x = 4$ ou $x = -\frac{7}{2}$

Vérification :

$(x - 4)(2x + 7) = (4 - 4)(2 \times 4 + 7) = 0 \times (2 \times 4 + 7) = 0$

$(x - 4)(2x + 7) = (-\frac{7}{2} - 4)(2 \times (-\frac{7}{2}) + 7) = (-\frac{7}{2} - 4) \times (-7 + 7) = (-\frac{7}{2} - 4) \times 0 = 0$

4 et ($-\frac{7}{2}$) sont solutions de cette équation.

4/ $\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$**.**

5/ Une baisse de 5 % signifie que le nouveau prix est 95 % de l'ancien prix.

$\frac{1\,200 \times 95}{100} = 1\,140$; le nouveau prix est de **1 140 €**.

Exercice 3 (1 + 1 + 0,5 = 2,5 pts)

Vénus : $105 \times 10^6 = 1,05 \times 10^8$ (écriture scientifique)

Mars : $2\,250 \times 10^5 = 2,25 \times 10^8$ (écriture scientifique)

Terre : $1,5 \times 10^8$ (écriture scientifique)

Puisque $1,05 < 1,5 < 2,25$; c'est $2,25 \times 10^8$ km qui est la plus grande distance : c'est Mars qui est la planète la plus éloignée du soleil.

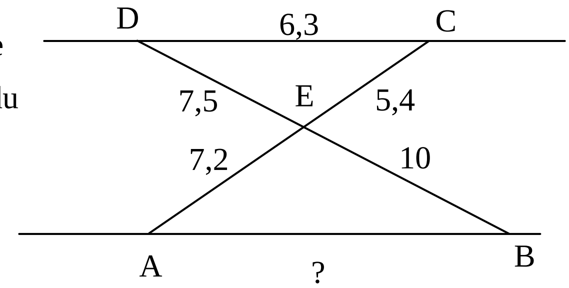
Solution : **ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES**

Exercice 1 (1,5 + 1,5 = 3 pts)

1/ D'une part $\frac{AE}{EC} = \frac{7,2}{5,4}$ et d'autre part $\frac{BE}{ED} = \frac{10}{7,5}$

Puisque $7,2 \times 7,5 = 54$ et $5,4 \times 10 = 54$, alors $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$

Puisque les points A, E et C sont alignés dans le même ordre que les points B, E et D, avec $\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED}$, alors d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



2/ Puisque les droites (AC) et (DB) sont sécantes en E avec (AB) // (CD), alors on peut utiliser le théorème de Thalès :

$\frac{AE}{EC} = \frac{BE}{ED} = \frac{AB}{CD}$ c'est-à-dire $\frac{7,2}{5,4} = \frac{10}{7,5} = \frac{AB}{6,3}$

$AB = \frac{10 \times 6,3}{7,5} = 8,4$ donc AB = 8,4 cm.

Exercice 2 (2 + 1 + 2 = 5 pts)

Figure n°1

D'une part la somme des carrés des deux plus petits côtés est :

$AB^2 + AC^2 = 30^2 + 40^2 = 900 + 1\,600 = 2\,500$.

D'autre part le carré du plus grand côté est :

$BC^2 = 50^2 = 2\,500$.

Puisque $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Figure n°2

Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Ici (DE) // (AC) et (CD) $\perp$ (DE) donc (CD) $\perp$ (AC).

Puisque (CD) $\perp$ (AC), alors $\widehat{ACB} = 90°$ et le triangle ABC est rectangle en C.

Figure n°3

Puisque les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AEC}$ sont inscrits dans le même cercle et interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$, alors ils ont la même mesure : $\widehat{ABC} = \widehat{AEC} = 50°$.

Dans le triangle ABC, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont complémentaires ($\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 50° + 40° = 90°$).

Donc $\widehat{BAC} = 90°$ et le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 3 (0,5 + 1 + 1 + 0,5 + 1 = 4 pts)

1/ Le triangle ABC rectangle en C tel que AC = 5 cm et $\widehat{BAC} = 40°$ est tracé ci-contre en vraie grandeur.

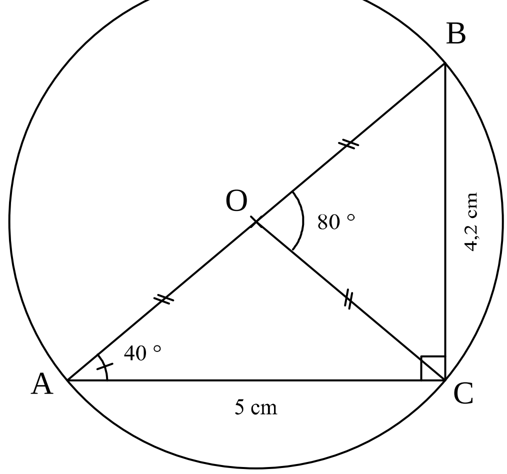
2/ Puisque ABC est rectangle en C, on a :

$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$ donc $\frac{\tan 40°}{1} = \frac{BC}{5}$

$BC = \frac{5 \times \tan 40°}{1} \approx 4,195\ ...$ donc BC ≈ 4,2 cm arrondi au mm.

3/a/ Puisque le triangle ABC est rectangle en C, alors le centre O de son cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypoténuse [AB].

3/b/ Ce cercle est tracé sur la figure ci-contre.



4/ $\widehat{BOC}$ est l'angle au centre qui intercepte le même arc $\overset{\frown}{BC}$ que l'angle inscrit $\widehat{BAC}$, donc $\widehat{BOC} = 2 \times 40° = 80°$.

SOLUTION : QUESTIONS ENCHAÎNÉES *(12 points)*

1/ À partir des calculs suivants (2,5 pts) :

		$75 \div 7{,}5 = \mathbf{10}$	$(90 - 18) \div 6 = \mathbf{12}$	$(113 - 33) \div 5 = \mathbf{16}$
	$7{,}5 \times 5 = \mathbf{37{,}5}$		$7{,}5 \times 12 = \mathbf{90}$	$7{,}5 \times 16 = \mathbf{120}$
$6 \times 1 + 18 = \mathbf{24}$	$6 \times 5 + 18 = \mathbf{48}$	$6 \times 10 + 18 = \mathbf{78}$		$6 \times 16 + 18 = \mathbf{114}$
$5 \times 1 + 33 = \mathbf{38}$	$5 \times 5 + 33 = \mathbf{58}$	$5 \times 10 + 33 = \mathbf{83}$	$5 \times 12 + 33 = \mathbf{93}$	

On obtient le tableau suivant avec les valeurs complétées en gras :

Nombre de litres	1	5	**10**	**12**	**16**
Prix au *tarif 1* (en €)	7,5	**37,5**	75	**90**	**120**
Prix au *tarif 2* (en €)	**24**	**48**	**78**	90	**114**
Prix au *tarif 3* (en €)	**38**	**58**	**83**	**93**	113

2/ (1,5 pt)

$P_1(x) = 7{,}5 \times x = 7{,}5x$ $\qquad$ $P_2(x) = 6 \times x + 18 = 6x + 18$ $\qquad$ $P_3(x) = 5 \times x + 33 = 5x + 33$

3/ (3,5 pts) On remarque que les fonctions f, g et h correspondent respectivement aux prix P_1, P_2, et P_3.
Puisque la fonction f : $x \longmapsto 7{,}5x$ est une fonction linéaire, sa représentation graphique est la droite (d_1) passant, d'après la question **1**, par les points de coordonnées respectives (0 ; 0) et (16 ; 120).
Puisque la fonction g : $x \longmapsto 6x + 18$ est une fonction affine, sa représentation graphique est la droite (d_2) passant, d'après la question **1**, par les points de coordonnées respectives (0 ; 18) et (12 ; 90).
Puisque la fonction h : $x \longmapsto 5x + 33$ est une fonction affine, sa représentation graphique est la droite (d_3) passant, d'après la question **1**, par les points de coordonnées respectives (0 ; 33) et (16 ; 113).
(Voir le graphique verso de la feuille annexe).

4/ Les parties complétées sont en gras ci-dessous (2 pts) :

a/ Les tarifs 1 et 2 conduisent au même prix pour **12 L** ; à ces deux tarifs, ce prix est de **90 €.**

b/ Pour 13 L achetés, le tarif le plus avantageux est **le tarif 2** avec le prix de **96 €.**

c/ Si on dispose de 45 euros, c'est le tarif **1** qui permet d'acheter le plus grand nombre de litres ; à ce tarif, ce nombre est de **6 L.**

d/ Le tarif 3 reste toujours le plus avantageux dès qu'on achète plus de **15 L.**

5/ (1,5 pt) Dire que "les tarifs 2 et 3 conduisent au même prix pour une quantité x" signifie que les prix correspondants sont égaux : $P_2(x) = P_3(x)$

$6x + 18 = 5x + 33$
$6x - 5x = 33 - 18$
$x = 15$

Vérification :
$6x + 18 = 6 \times 15 + 18 = 108$
$5x + 33 = 5 \times 15 + 33 = 108$

Les prix 2 et 3 sont égaux à 108 € pour une quantité achetée de 15 litres *(on peut le vérifier sur le graphique).*

6/ (1 pt) Une remise de 40 % signifie que le prix $P_4(x)$ vaut 60 % du prix $P_1(x)$ obtenu par le tarif 1 :

$P_4(x)$ = 60 % de $P_1(x)$ donc $P_4(x) = \dfrac{60}{100} \times 7{,}5x$

$$P_4(x) = \frac{60 \times 7{,}5x}{100} = \frac{450x}{100} = 4{,}5x$$

Graphiquement, la droite (d_4) représentant le tarif 4 reste sous les trois autres droites : le tarif 4 semble donc le plus avantageux quelle que soit la quantité achetée !

Représentations graphiques des fonctions f, g et h (prix 1, 2, 3)