Collège LANGEVIN WALLON

BREVET BLANC DES 6 et 7 février 2003

SÉRIE COLLÈGE

Durée 2 heures MATHEMATIQUES

Rédaction, présentation, orthographe (4 points)

PARTIE I : ACTIVITES NUMERIQUES (12 points)

Dans toute cette partie, les résultats des calculs demandés doivent être accompagnés d'explications, le barème en tiendra compte.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice I :

On considère les trois nombres A, B, C :

$A = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{11}{6}$; $B = 2\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$; $C = \frac{4 \times 10^{14} \times 12}{3 \times 10^{11}}$

1. Calculer et donner A sous forme d'une fraction irréductible.

$A = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{11}{6}$

$A = \frac{7}{5} + \frac{11}{5 \times 2}$

$A = \frac{14}{10} + \frac{11}{10} = \frac{25}{10} = \mathbf{\frac{5}{2}}$

2. Écrire B sous la forme $a\sqrt{5}$, a étant un nombre entier relatif.

$B = 2\sqrt{5} - \sqrt{20} - 3\sqrt{45}$

$B = 2\sqrt{5} - \sqrt{4 \times 5} - 3\sqrt{9 \times 5}$

$B = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 9\sqrt{5}$

$B = -\mathbf{9\sqrt{5}}$

3. Donner l'écriture scientifique de C.

$C = \frac{4 \times 10^{14} \times 12}{3 \times 10^{11}}$

$C = \frac{4 \times 12}{3} \times \frac{10^{14}}{10^{11}}$

$C = 16 \times 10^3$

$C = \mathbf{1{,}6 \times 10^4}$

Exercice II :

On considère l'expression $D = (4x - 1)^2 + (x + 3)(4x - 1)$.

1. Développer puis réduire D.

$D = (4x - 1)^2 + (x + 3)(4x - 1)$

$D = 16x^2 – 8x + 1 + 4x^2 – x + 12x – 3$

D = **$20x^2 + 3x – 2$**

2. Factoriser D.

$D = (4x - 1)^2 + (x + 3)(4x - 1)$

$D = (4x – 1)[4x – 1 + x + 3]$

D = **$(4x – 1)(5x + 2)$**

3. Résoudre l'équation: $(4x - 1)(5x + 2) = 0$.

$(4x - 1)(5x + 2) = 0$

si un produit est nul, alors l'un de ses facteurs est nul. Donc :

$4x – 1 = 0$ ou $5x + 2 = 0$

$4x = 1$ ou $5x = – 2$

$x = 1/4 = 0,25$ ou $x = – 2/5 = – 0,4$

donc l'équation a deux solutions : **0,25 et -0,4**

Exercice III :

1. Calculer le plus grand diviseur commun de 540 et 300.

Calcul du pgcd de 540 et 300 par la méthode d'Euclide (division euclidienne) :
$540 = 300 \times 1 + 240$
$300 = 240 \times 1 + 60$
$240 = 60 \times 4 + 0$
le dernier reste non nul est 60 donc le plus grand diviseur commun de 540 et 300 est **60**.

2. Une pièce rectangulaire de 5,40 m de long et de 3 m de large est recouverte, sans découpe, par des dalles de moquette carrées, toutes identiques.

a. Quelle est la mesure du côté de chacune de ces dalles, sachant que l'on veut le moins de dalles possibles ?

La pièce doit être recouverte sans découpe par des dalles carrées identiques donc le côté de ces dalles doit être un diviseur commun des dimensions de la pièce soit en cm de 540 et 300.

On veut le moins de dalles possibles donc les dalles doivent être les plus grandes possibles. Donc leur côté doit être le plus grand diviseur commun de 540 et 300 soit **60 cm**

b. Calculer alors le nombre de dalles utilisées.

$540 \div 60 = 9$ donc il y a neuf dalles sur la longueur

$300 \div 60 = 5$ donc il y a cinq dalles sur la largeur

$9 \times 5 = 45$ donc il y a **45** dalles en tout

Exercice IV :

Voici le diagramme représentant la répartition des notes obtenues par les élèves d'une classe de troisième lors d'un contrôle de français: les notes sur 20 sont reportées en abscisses, le nombre d'élèves est reporté en ordonnées:

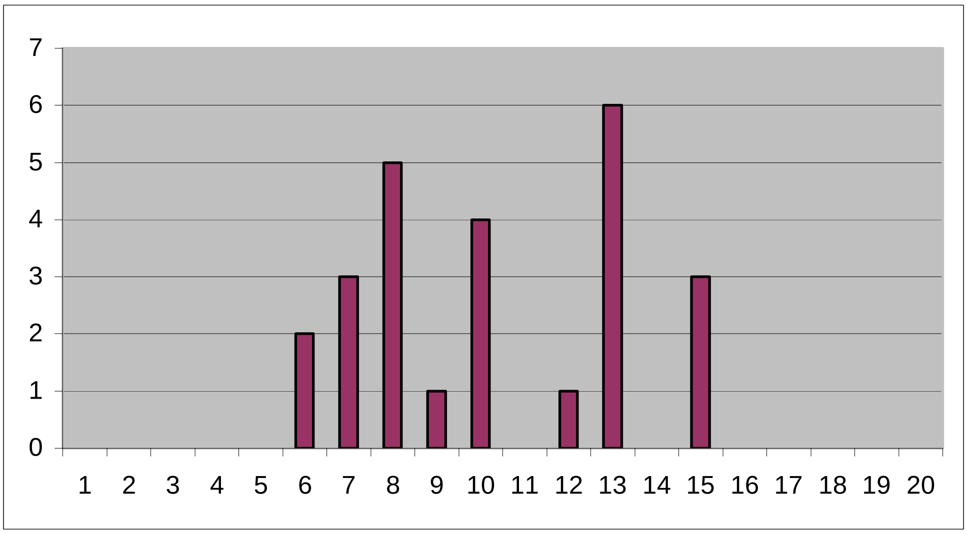
1. Quel est l'effectif de cette classe de troisième ?

2 + 3 + 5 + 1 + 4 + 1 + 6 + 3 = 25

il y a **25** élèves dans la classe de troisième

2. Calculer la moyenne des notes obtenues en donnant le résultat sous sa forme décimale exacte.

$\frac{6\times2+7\times3+5\times8+1\times9+4\times10+1\times12+6\times13+3\times15}{25} = \frac{257}{25} = \mathbf{10{,}28}$



PARTIE II : ACTIVITES GEOMETRIQUES (12 points)

Exercice I :

L'unité de longueur est le mètre. Le dessin n'est pas à l'échelle.

1. Roméo (R) veut rejoindre Juliette (J) à sa fenêtre. Pour cela, il place une échelle [JR] contre le mur [JH]. Le mur et le sol sont perpendiculaires.
On donne : HR = 3 et JH = 4.

a. Calculer JR.

dans le triangle JHR rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore on a :

$JR^2 = JH^2 + HR^2$

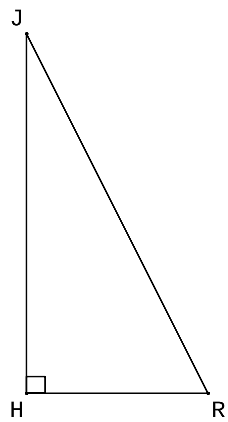
$JR^2 = 4^2 + 3^2$

$JR^2 = 16 + 9$

$JR^2 = 25$

Donc $JR = \sqrt{25}$

JR = 5m



b. Calculer $\cos \widehat{HJR}$, puis la valeur de l'angle $\widehat{HJR}$ arrondie au degré.

le triangle JHR est rectangle en H donc :

$\cos \widehat{HJR} = \frac{JH}{JR} = \frac{4}{5} = \mathbf{0{,}8}$

Donc $\widehat{HJR} \approx \mathbf{37°}$

2. L'échelle glisse.

On donne : JR = 5 et $\widehat{HJR}$ = 40°

a. Calculer HR (donner la valeur arrondie au dixième).

le triangle JHR est rectangle en H donc :

$\sin \widehat{HJR} = \frac{HR}{JR}$

$\sin 40° = \frac{HR}{5}$

donc HR = 5 × sin 40°

HR ≈ **3,2m**

b. Écrire l'expression de tan $\widehat{HJR}$, puis calculer JH (donner la valeur arrondie au dixième).

le triangle JHR est rectangle en H donc :

$\tan \widehat{HJR} = \frac{HR}{JH}$

$\tan 40° \approx \frac{3,2}{JH}$

$JH \approx \frac{3,2}{\tan 40°}$

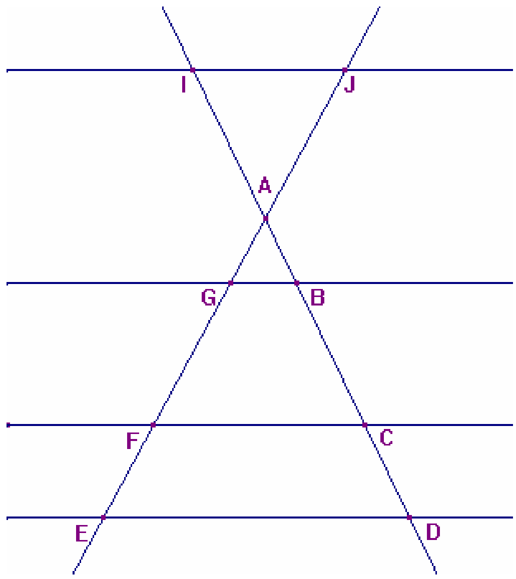
JH ≈ **3,8m**

Exercice II :

Observer la figure ci-contre.

On donne :

AG = 2
AF = 5
AC = 4
GB = 1,5
AE = 10
AD = 8
IA = 2,3
JA = 3
(GB) // (FC)



1. Calculer les longueurs AB et FC.

Dans le triangle AFC la droite(GB) coupe le côté[AF] en G et le côté [AC] en B, et est parallèle à la droite (FC), dont d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{AG}{AF} = \frac{AB}{AC} = \frac{GB}{FC}$

$\frac{2}{5} = \frac{AB}{4} = \frac{1,5}{FC}$

donc $AB = \frac{2 \times 4}{5}$ = **1,6** et $FC = \frac{5 \times 1,5}{2}$ = **3,75**

2. Les droites (FC) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier la réponse.

$\frac{AF}{AE} = \frac{5}{10} = 0,5$

$\frac{AC}{AD} = \frac{4}{8} = 0,5$

Donc $\frac{AF}{AE} = \frac{AC}{AD}$

de plus les droites (AF) et (AC) sont sécantes en A et les points A,F,E d'une part et A,C,D d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Donc, d'après la réciproque théorème de Thalès, **les droites (FC) et (ED) sont parallèles.**

3. Les droites (IJ) et (FC) sont-elles parallèles ?
   Justifier la réponse.

$\frac{AJ}{AF} = \frac{3}{5} = 0,6$

$\frac{AI}{AC} = \frac{2,3}{4} = 0,575$

donc $\frac{AJ}{AF} \neq \frac{AI}{AC}$

donc **(FC) et (IJ) ne sont pas parallèles.**

PARTIE III : PROBLEME (12 points)

Construire un triangle MNP tel que:

PN = 13 cm; PM = 5 cm; MN = 12 cm.

Partie A

1. Prouver que ce triangle MNP est rectangle en M.

$PN^2 = 13^2 = 169$

$PM^2 + MN^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$

donc $PM^2 = PN^2 + MN^2$

donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle PMN est rectangle en M.**

2. Calculer son périmètre et son aire.

Périmètre du triangle PMN : 13 + 5 + 12 = **30 cm**

Aire du triangle PMN rectangle en M : $\frac{PM \times MN}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = \mathbf{30cm^2}$

3. Tracer le cercle circonscrit au triangle MNP ; préciser la position de son centre O et la mesure de son rayon.

Le triangle MNP est rectangle en M. or si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse.

Donc **le centre du cercle circonscrit au triangle MNP est le milieu de [PN]** et le rayon de ce cercle est la moitié de PN soit **6,5 cm.**

4. Calculer la tangente de l'angle $\widehat{PNM}$; en déduire une mesure approchée de cet angle à 1° près.

Le triangle MNP est rectangle en M donc :

$\tan \widehat{PNM} = \frac{PM}{MN} = \frac{5}{12}$

$\widehat{PNM} \approx 23°$ (ou 22°)

Partie B

A est un point quelconque du côté [PM].
On pose: AM = x (x est donc un nombre compris entre 0 et 5).
La parallèle à (PN) passant par A coupe le segment [MN] en B.

1. En précisant la propriété utilisée, exprimer MB et AB en fonction de x.

Dans le triangle PMN, la droite (AB) coupe le côté [PM] en A et le côté [MN] en B et est parallèle à (PN). Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{MA}{MP} = \frac{MB}{MN} = \frac{AB}{PN}$

$\frac{x}{5} = \frac{MB}{12} = \frac{AB}{13}$

donc MB = $\mathbf{\frac{12x}{5} = 2{,}4x}$ et AB = $\mathbf{\frac{13x}{5} = 2{,}6x}$

2. Exprimer, en fonction de x, le périmètre du triangle AMB.

Le périmètre du triangle AMB est égal à :

AM + MB + BA = x + 2,4x + 2,6x = **6x**

ou AM + MB + BA = $x + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5} = \frac{5x}{5} + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5} = \mathbf{\frac{30x}{5} = 6x}$

3. Résoudre l'équation : $x + \frac{12}{5}x + \frac{13}{5}x = 18$.

$x + \frac{12}{5}x + \frac{13}{5}x = 18$

$\frac{5x}{5} + \frac{12x}{5} + \frac{13x}{5} = 18$

$6x = 18$

$x = \frac{18}{6} = 3$

la solution de l'équation est : **3**

4. **a.** Faire une nouvelle figure en plaçant le point A de façon que le périmètre du triangle AMB soit égal à 18 cm.

D'après la question 2, le périmètre du triangle est 6x.

D'après la question 3, ce périmètre vaut 18 cm quand AM = 3cm.

Donc il faut placer le point A à 3 cm du point M.

b. Quelle est alors l'aire du triangle AMB ?

Le triangle AMB est rectangle en M donc son aire est égale à :

$\frac{AM \times BM}{2} = \frac{3 \times (2{,}4 \times 3)}{2} = \frac{3 \times 7{,}2}{2} = \mathbf{10{,}8cm^2}$