Collège LANGEVIN WALLON

BREVET BLANC DES 5 et 6 février 2004

Corrigé

MATHEMATIQUES

PARTIE I : ACTIVITES NUMERIQUES (12 points)

Exercice I :1

1. En faisant apparaître les différentes étapes de calcul, écrire A et B sous la forme d'une fraction irréductible.

$A = 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $B = \dfrac{3 - \frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{5}}$

$A = 1 - \left(\frac{8}{12} + \frac{3}{12}\right)$ $\qquad$ $B = \dfrac{\frac{6}{2} - \frac{5}{2}}{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}$

$A = 1 - \frac{11}{12}$ $\qquad$ $B = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{6}{5}}$

$A = \frac{12}{12} - \frac{11}{12}$ $\qquad$ $B = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6}$

$\mathbf{A = \frac{1}{12}}$ $\qquad$ $\mathbf{B = \frac{5}{12}}$

2. Calculer les quatre-cinquièmes de $\frac{35}{8}$. On appellera C le résultat donné sous forme de fraction irréductible.

$C = \frac{4}{5} \times \frac{35}{8} = \frac{4 \times 7 \times 5}{5 \times 4 \times 2} = \mathbf{\frac{7}{2}}$

3. Montrer que A + B + C est un nombre entier.

$A + B + C = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{7}{2}$

$A + B + C = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{42}{12}$

$A + B + C = \frac{48}{12}$

A +B+ C = **4** (4 est nombre entier)

Exercice II :

1. En faisant apparaître les étapes, calculer et donner l'écriture scientifique de : $D = \dfrac{2 \times 10^3 \times 5 \times (10^{-5})^2}{2 + 18}$

$D = \frac{2 \times 5}{2 + 18} \times 10^3 \times \left(10^{-5}\right)^2$

$D = \frac{10}{20} \times 10^3 \times 10^{-10}$

$D = 0,5 \times 10^{-7}$

$\mathbf{D = 5 \times 10^{-8}}$

2. a) E = $2\sqrt{27}+\sqrt{18}\times\sqrt{6}$. Calculer et écrire E sous la forme $a\sqrt{3}$ (a entier relatif)

$E = 2\sqrt{9\times3}+\sqrt{9\times2}\times\sqrt{2\times3}$

$E = 2\times3\sqrt{3}+3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}$

$E = 6\sqrt{3}+3\times2\sqrt{3}$

$E = 6\sqrt{3}+6\sqrt{3}$

$\mathbf{E = 12\sqrt{3}}$

b) F = $(\sqrt{2}-4)(2+4\sqrt{2})$. Calculer et écrire F sous la forme $b\sqrt{2}$ (b entier relatif)

$F = 2\sqrt{2}+4\times2-8-16\sqrt{2}$

$F = -14\sqrt{2}+8-8$

$\mathbf{F = -14\sqrt{2}}$

Exercice III :

Soit l'expression $P=(2x-1)^2-16$

1. Calculer P pour $x=\dfrac{1}{2}$

$P = (2\times\frac{1}{2}-1)^2-16$

$P = (1-1)^2-16$

$P = 0-16$

$\mathbf{P = -16}$

2. Développer P.

$P = 4x^2-4x+1-16$

$\mathbf{P = 4x^2-4x-15}$

3. Factoriser P.

$P = [(2x-1)-4]\ [(2x-1)+4]$

$P = [2x-1-4]\ [2x-1+4]$

$\mathbf{P = (2x-5)(2x+3)}$

Exercice IV :

Les deux questions posées dans cet exercice sont indépendantes.

6510 fourmis noires et 4650 fourmis rouges décident de s'allier pour combattre les termites.

1. Pour cela, la reine des fourmis souhaite constituer, en utilisant toutes les fourmis, des équipes qui seront toutes composées de la même façon : un nombre de fourmis rouges et un autre nombre de fourmis noires.
Quel est le nombre maximal d'équipes que la reine peut ainsi former ?

Les équipes sont toutes composées de la même façon donc le nombre d'équipes est **un diviseur commun** à 6510 et 4650.

On veut le nombre maximal d'équipes donc le nombre d'équipes est le **Plus Grand Commun Diviseur** de 6510 et 4650.

On va calculer le PGCD de 6510 et 4650 à l'aide de l'algorithme d'Euclide :
6510 = 4650 × 1 + 1860

4650 = 1860 × 2 + 930
1860 = 930 × 2 + 0

Le dernier reste non nul est 930 donc le PGCD de 6510 et 4650 est 930 .

Le nombre maximal d'équipes que la reine peut ainsi former est donc 930.

2. Si toutes les fourmis, rouges et noires, se placent en file indienne, elles forment une colonne de 42,78m de long.
Sachant qu'une fourmi rouge mesure 2mm de plus qu'une fourmi noire, déterminer la taille d'une fourmi rouge et celle d'une fourmi noire.

Soit x la longueur d'une fourmi noire en millimètre. Donc une fourmi rouge mesure (x+2). La colonne mesurera donc 6510x + 4650(x + 2).

Donc on a : 6510x + 4650(x + 2) = 42780
6510x + 4650x + 9300 = 42780
11160x = 42780 – 9300
11160x = 33480
x = 33480÷11160 = 3

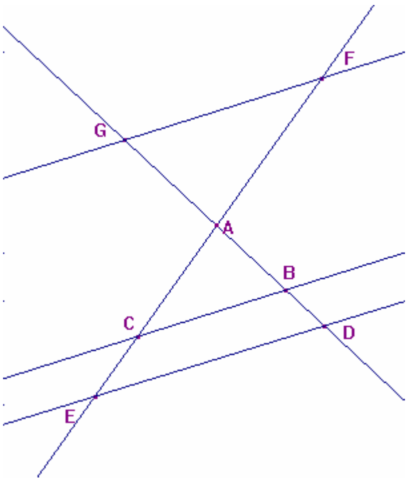
Donc une fourmi noire mesure 3mm et une fourmi rouge mesure 5mm.

PARTIE II : ACTIVITES GEOMETRIQUES (12 points)

Exercice I :

L'unité de longueur est le centimètre.

Sur la figure ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur, les droites (BC) et (GF) sont parallèles. On sait que :
AB = 3 CE = 2,4
AC = 4 BD = 1,8
BC = 4,5 AF = 3,6



1. Calculer la longueur GF.

Les droites (GB) et (CF) se coupent en A et les droites (BC) et (GF) sont parallèles. Donc , d'après le **théorème de Thalès**, on a :

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{GF}{BC}$$

$$\frac{AG}{3} = \frac{3,6}{4} = \frac{GF}{4,5}$$

Donc GF = $\frac{3,6 \text{ x } 4,5}{4}$ = **4,05 cm**

2. Les droites (BC) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier.

Les points A, B, D sont alignés donc : AD = AB + BD = 3 + 1,8 = 4,8
Les points A, C, E sont alignés donc : AE = AC + CE = 4 + 2,4 = 6,4

$$\frac{AB}{AD} = \frac{3}{4,8} = \frac{5}{8} = 0,625$$

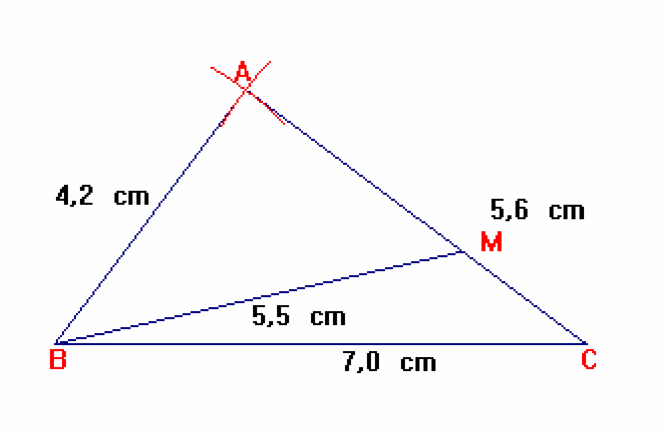
$$\frac{AC}{AE} = \frac{4}{6,4} = \frac{5}{8} = 0,625$$

Donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$. De plus comme les points A, B, D d'une part et A, C, E d'autre part sont alignés dans cet ordre et que les droites (CE) et (BD) sont sécantes en A, d'après la **réciproque du théorème de Thalès**, **les droites (BC) et (ED) sont parallèles**.

Exercice II :

1. Construire un triangle ABC tel que AB = 4,2cm, AC=5,6cm, BC=7cm.

2. Montrer que $\widehat{BAC}$ est un angle droit.



$BC^2 = 7^2 = 49$

$AB^2 + AC^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 17{,}64 + 31{,}36 = 49$

Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Donc d'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en A.

Donc $\widehat{BAC}$ **est un angle droit**

3. Placer, sur le segment [AC], le point M tel que BM=5,5cm. Calculer au mm près, la longueur du segment [AM].

Le triangle ABM est rectangle en A, donc d'après l théorème de Pythagore :

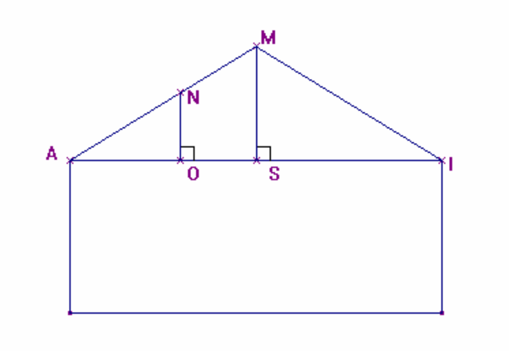
$BM^2 = AB^2 + AM^2$ soit $AM^2 = BM^2 - AB^2$

$AM^2 = 5{,}5^2 - 4{,}2^2 = 12{,}61$

$\mathbf{AM = \sqrt{12{,}61} \approx 3{,}6\ cm}$

Exercice III :

L'unité de longueur est le mètre.



Le dessin ci-contre représente la coupe d'une maison.
Le triangle MAI est isocèle de sommet principal M. La droite perpendiculaire à la droite (AI) passant par M, coupe (AI) en S. On sait que MS = 2,5 et AI = 11.

1. a. Calculer AS. (Justifier.)

Le triangle MAI est isocèle en M et la droite (MS) est perpendiculaire à (AI) donc (MS) est la médiatrice de [AI] et S est le milieu de [AI].

Donc AS = AI ÷ 2 = 11 ÷ 2 = **5,5m**

b. Calculer la valeur arrondie à 0,1 degré près de la mesure de l'angle $\widehat{AMS}$.

Le triangle AMS est rectangle en S donc on a :

$\tan \widehat{AMS} = \frac{AS}{MS} = \frac{5{,}5}{2{,}5} = 2{,}2$

Donc $\widehat{AMS} = \tan^{-1}(2{,}2) \approx$ **65,6°**

2. Dans le toit, il y a une fuite en N qui fait une tache en O, sur le plafond. La droite (NO) est perpendiculaire à la droite (AI). AO=4,5.

Pour effectuer les calculs, on prendra : $\widehat{OAN} = 24°$.
Calculer AN. On donnera la valeur arrondie à 0,1 près.

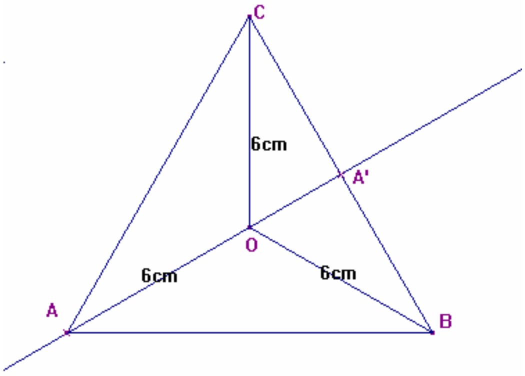
Le triangle ANO est rectangle en O donc on a :

$\cos \widehat{OAN} = \frac{AO}{AN}$

$\cos 24° = \frac{4{,}5}{AN}$

Donc $AN = \frac{4{,}5}{\cos 24°} \approx$ **4,9m**

PARTIE III : PROBLEME (12 points)



On considère un triangle équilatéral ABC.
Les droites (OA), (OB) et (OC) sont les trois médiatrices du triangle ABC.

La longueur OB est 6 cm.
La droite (OA) coupe le segment [BC] en A'. On ne demande pas de reproduire la figure.

1. Justifier que l'angle $\widehat{OBA'}$ mesure 30°.

Dans un triangle équilatéral, les médiatrices des côtés sont aussi les bissectrices des angles. Donc (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et partage l'angle en deux angles égaux. Donc $\widehat{OBA'}$ mesure la moitié de $\widehat{ABC}$ et comme les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°, donc **l'angle $\widehat{OBA'}$ mesure 30°.**

2. **a.** En utilisant $\sin \widehat{OBA'}$, démontrer que la longueur du segment [OA'] est 3cm.

(OA') est la médiatrice de [BC] donc le triangle OBA' est rectangle en A' donc on a :

$$\sin \widehat{OBA'} = \frac{OA'}{OB}$$

$$\sin 30° = \frac{OA'}{6}$$

Donc OA' = 6 sin30° = 6×0,5 = **3cm**

b. Démontrer que la longueur du segment [BA'] est $3\sqrt{3}$cm.

Le triangle OBA' est rectangle en A' donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OB^2 = OA'^2 + BA'^2$

$6^2 = 3^2 + BA'^2$

$36 = 9 + BA'^2$

Donc $BA'^2 = 36 - 9 = 27$

Donc $BA' = \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = \mathbf{3\sqrt{3}}$ **cm**

c. En déduire la longueur exacte du segment [BC].

A' étant le milieu de [BC], $BC = 2\times BA' = 2\times 3\sqrt{3} = \mathbf{6\sqrt{3}}$ **cm**

3. Soit E le point du segment [OC] tel que OE=2cm. La parallèle à la droite (BC) passant par le point E coupe le segment [OB] en F.
Calculer les longueurs des segments [OF] et [EF].

Dans le triangle OBC, la droite (EF) coupe [OC] en E et [OB] en F et est parallèle à (BC) donc , d'après le **théorème de Thalès**, on a :

$$\frac{OE}{OC} = \frac{OF}{OB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{2}{6} = \frac{OF}{6} = \frac{EF}{6\sqrt{3}}$$

Donc $OF = \frac{2\times 6}{6} =$ **2cm** et $EF = \frac{2\times 6\sqrt{3}}{6} = \mathbf{2\sqrt{3}}$**cm**

4. Démontrer que l'aire du triangle COB est $9\sqrt{3}$ cm².

aire d'un triangle : $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$

(OA') est perpendiculaire à (BC) donc l'aire du triangle OBC est égale à :

$$BC\times OA'/2 = \frac{6\sqrt{3}\times 3}{2} = \mathbf{9\sqrt{3}\,cm^2}$$

5. Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe la droite (AA') en A et en un autre point noté K.
Démontrer que le quadrilatère OBKC est un losange.

Le cercle circonscrit au triangle ABC est le cercle de centre O (point d'intersection des médiatrices) et de rayon OA. Donc OK = OA = 6cm.

OA' = 3cm donc A' est le milieu de [OK].

Comme A' est aussi le milieu de [BC] et que (BC) et (OA') sont perpendiculaires, le quadrilatère OBKC a des diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu, c'est donc un **losange**.

6. Calculer l'aire du losange OBKC.

aire d'un losange : produit des diagonales divisé par 2

Donc l'aire du losange OBKC est égale à :

BC×OK/2 = $\frac{6\sqrt{3} \times 6}{2}$ = $\mathbf{18\sqrt{3}}$**cm²**

(on pouvait aussi calculer le double de l'aire de OBC)