Expression du terme de rang n d'une suite récurrente

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la particularité trouvée.

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1} . Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

   (a) À l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la formule trouvée.

   (b) Démontrer cette formule.

Production demandée

– Le nuage de points attendu dans la question 1 et la particularité trouvée à ce nuage.
– La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.

Recherche d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans le plan $\mathscr{P}$, on donne quatre points $O,\ A,\ B$ et C et un cercle (Γ) de centre O.
Le point M est un point quelconque variable sur le cercle (Γ). On associe au point M l'unique point M' du plan $\mathscr{P}$ défini par l'égalité : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$.
Il s'agit de déterminer le lieu géométrique $\mathscr{L}$ du point M' lorsque le lieu géométrique du point M est le cercle (Γ).

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie plane construire les points $O,\ A,\ B$ et C, le cercle (Γ) et un point libre M sur ce cercle.
   (b) Construire le point M' associé à M.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction faite.

   (c) En observant plusieurs positions du point M faire une conjecture sur la nature de la transformation du plan qui transforme M en M' ainsi que la nature du lieu géométrique du point M'.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée et de la conjecture faite

2. (a) Déterminer par le calcul la nature de la transformation du plan qui transforme le point M en le point M'.
   (b) Déterminer le lieu géométrique $\mathscr{L}$ du point M'.

Production demandée

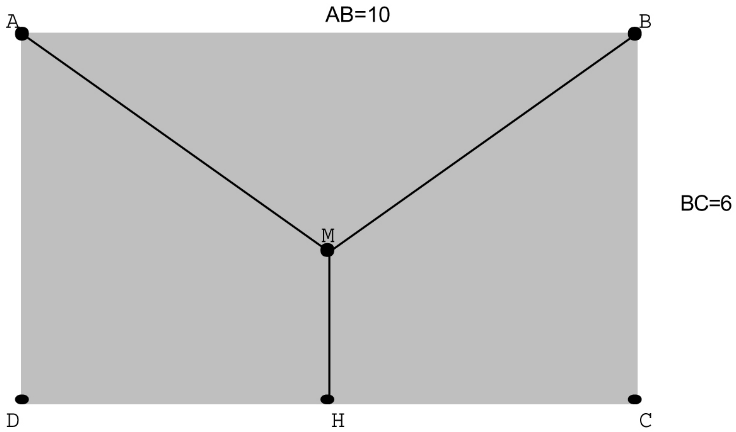
– La figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
– Le calcul permettant d'obtenir la nature de la transformation.
– La caractérisation du lieu géométrique de M' et sa justification.

Problème d'optimisation

Énoncé

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade ainsi que quelques dimensions, exprimées en mètre.



Sur ce plan :
– $[AM]$ et $[BM]$ représentent les deux premiers tuyaux
– $[MH]$ représente le troisième tuyau
– (MH) est la médiatrice de $[DC]$.

On souhaite trouver la position du point M sur la façade de cette maison qui permet de minimiser la longueur des tuyaux à acheter et donc la dépense à effectuer.

On note Q le projeté orthogonal de M sur (BC) et on prend comme variable la mesure en radian de l'angle aigu $\widehat{BMQ} = \theta$.

1. (a) Utiliser un logiciel de géométrie pour simuler la situation décrite précédemment
   (b) En déduire une valeur approchée au centième de la valeur de θ qui rend minimale la longueur des tuyaux. Déterminer, grâce au logiciel, une valeur approchée au centième de la longueur minimale totale des tuyaux.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la construction et des réponses trouvées.

2. On définit la fonction $g : \theta \to g(\theta) = 2MA + MH$ sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

(a) On note g' la fonction dérivée de g. Démontrer que $g'(\theta) = 5 \times \dfrac{2\sin\theta - 1}{(cos\theta)^2}$.

(b) Déterminer la valeur exacte de θ qui minimise la longueur des tuyaux.

Production demandée

– Les réponses attendues dans la question 1.
– Les démonstrations attendues dans la question 2.

Nombre de solutions d'une équation

Énoncé

On donne un réel k.
On s'intéresse au nombre de solutions de l'équation (E) : $\ln(x) = kx^2$ pour x strictement positif.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique :
   (a) Conjecturer, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation (E).

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

   (b) Si $k > 0$, trouver graphiquement une valeur approchée de k pour laquelle l'équation (E) a une unique solution.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la valeur trouvée.

2. Démontrer que pour $k < 0$, l'équation (E) a une unique solution.

Production demandée

– Pour la question 1.(b), recopier la valeur approchée obtenue pour k ;
– Réponse écrite pour la question 2.

Comportement d'une suite définie par une relation de récurrence

Énoncé

Une suite v est définie par son premier terme v_0 et par la relation de récurrence :
pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n + 6$.

1. A l'aide de la calculatrice ou du tableur, émettre une conjecture sur la limite l de la suite v, selon les valeurs de v_0.

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

2. La suite w est définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - l$.
   (a) Observer à la calculatrice ou au tableur les premiers rangs de la suite w. Quelle semble être la nature de la suite w ? est-elle arithmétique ? géométrique ? ni arithmétique, ni géométrique ?

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

   (b) Démontrer la propriété conjecturée sur la nature de la suite w.
   (c) Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n.
   (d) Déterminer la limite de la suite v.
   (e) Ce résultat est-il cohérent avec l'expérimentation ?

Production demandée

Réponses écrites pour les questions 2.(b), 2.(c), 2.(d), 2.(e).

Courbe représentative de la fonction exponentielle

Énoncé

On désigne par a un nombre réel.
Dans un repère orthonormal du plan, on considère la courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction exponentielle et la droite $\mathscr{D}_a$ d'équation $y = ax$.

1. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique, dire si les propositions suivantes semblent vraies ou fausses :

   – *Proposition 1 :* La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}_1$.
   – *Proposition 2 :* Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 3x$.
   – *Proposition 3 :* Il existe une valeur de a pour laquelle la droite $\mathscr{D}_a$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier les réponses

2. En utilisant un logiciel de construction graphique ou une calculatrice graphique, conjecturer, suivant les valeurs du réel a, la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_a$.

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture

3. Justifier la proposition 3 de la question 1.

Production demandée

Réponse écrite pour la question 3.

Planètes et ajustement

Énoncé

Le tableau ci-contre donne, pour chaque planète du système solaire, sa période de révolution et le rayon de l'orbite considérée comme circulaire.

A	B	C
Planète	r (en m)	T (en s)
Mercure	5.79E+10	7.60E+06
Vénus	1.08E+11	1.94E+07
Terre	1.49E+11	3.16E+07
Mars	2.28E+11	5.94E+07
Jupiter	7.78E+11	3.74E+08
Saturne	1.42E+12	9.30E+08
Uranus	2.87E+12	2.66E+09
Neptune	4.50E+12	5.20E+09

1. Entrer sur une feuille de calcul d'un tableur les données des colonnes A, B et C. Tracer à l'aide du tableur le graphique représentant la période T en fonction du rayon r.
   Combien de points apparaissent nettement sur le graphique ? les identifier et expliquer le phénomène.
2. Faire afficher le graphique donnant $\ln(T)$ en fonction de $\ln(r)$. Combien de points apparaissent sur le graphique et que constatez-vous ?

Appeler l'examinateur pour lui montrer les graphiques obtenus.

3. Déterminer, à l'aide du tableur le coefficient directeur d'une droite qui permet de donner un ajustement des points représentés. Quelle est l'équation de la droite que l'on peut retenir expérimentalement ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter la procédure retenue et contrôler le résultat.

4. En déduire que pour les huit planètes étudiées, $T \approx k\left(\sqrt{r}\right)^3$, où k est une constante réelle. Vérifier avec le tableur.

Production demandée

- Pour la question 1, une analyse argumentée du graphique obtenu est attendue.
- Pour la question 2, une analyse du nouveau graphique obtenu est attendue. L'argumentation fera l'objet des questions suivantes.
- Pour la question 3, préciser la méthode de calcul choisie pour établir une équation de la droite d'ajustement.
- Pour la question 4, une rédaction détaillée du calcul de la valeur de k est attendue.

Simulation d'une expérience aléatoire, lois de probabilités

Énoncé

On dispose d'une roue divisée en trois secteurs identiques numérotés 1, 2 et 3.
On suppose qu'après rotation, la roue s'arrête sur l'un des trois secteurs de façon équiprobable.
On fait tourner successivement trois fois de suite la roue dans le sens trigonométrique en supposant que chaque résultat est indépendant des deux autres.
S désigne la variable aléatoire définie par la somme des trois numéros obtenus.
La variable aléatoire D est le numéro obtenu lors de la seconde rotation.

1. Sur un tableur réaliser une simulation de taille 100 de cette expérience.

   Appeler l'examinateur en cas de difficulté et pour valider.

2. Déterminer pour cette simulation les répartitions des fréquences de la variable aléatoire S.

   Appeler l'examinateur pour valider les résultats.

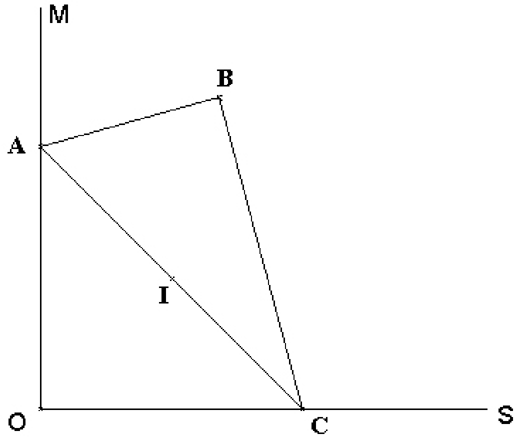
3. En utilisant les résultats connus sur la répétition d'expériences indépendantes, déterminer les lois de probabilités des variables aléatoires S et D.
4. La simulation du 2. est-elle cohérente avec les valeurs théoriques obtenues au 3. ?
5. Les évènements « S=3 » et « D=1 » sont-ils indépendants ?

Production demandée

– Pour les questions 3 et 5, les réponses sont à justifier.
– Pour la question 4, une rapide explication de la cohérence est demandée.

Etude de lieux géométriques

Énoncé



Le triangle ABC représente une équerre telle que $AB = 3$, $AC = 6$ et l'angle en B est droit.

Les points A et C glissent respectivement sur les demi-droites perpendiculaires $[OM)$ et $[OS)$.

Le point I est le milieu du segment $[AC]$.

On s'intéresse aux lieux des points I et B.

1. Observer les propriétés géométriques de la figure. Avec un logiciel de géométrie, construire une figure dynamique illustrant la situation.

Appeler l'examinateur pour vérifier la construction ou en cas de difficulté.

2. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point I quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

3. Visualiser, à l'aide du logiciel, le lieu du point B quand C décrit la demi-droite $[OS)$. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de ce lieu ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

4. - Donner les mesures des angles de l'équerre, puis celle de $\widehat{AOB}$ (A distinct de O).
   - En déduire que le lieu de B est inclus dans une courbe simple dont on précisera la nature.
   - Démontrer que : $OB = 6\ \sin(\widehat{OAB})$.
   - En déduire le lieu de B.

Production demandée

Réponse écrite pour la question 4.

Orthocentre

Énoncé

Dans le plan, ABC est un triangle quelconque.
On note K le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.
On s'intéresse au lieu $(\mathscr{L})$ des points H quand C se déplace sur une droite parallèle à la droite (AB).

1. (a) Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, faisant apparaître les points A et B, le point C sur une droite parallèle à la droite (AB), le triangle ABC, le point H et le point K.
   Afficher la trace du point H quand C varie sur la parallèle à (AB).
   Faire une conjecture concernant la nature du lieu des points H.

   (b) Vérifier à l'aide du logiciel (la vérification par le calcul n'est pas demandée ici) l'égalité
   $$(e) : \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}.$$

Appeler l'examinateur.

2. À partir de cette question, le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$; les points A et B sont donnés par leurs coordonnées : $A(-1\,;\,1)$ et $B(1\,;\,1)$. Le point C est sur l'axe des abscisses, et a pour abscisse un réel x.
   (a) Demander à nouveau le lieu $(\mathscr{L})$ des points H.
   (b) Quelle en serait une équation ?
3. Vérifier la conjecture émise en traçant le lieu des points H grâce à son équation.

Appeler l'examinateur.

4. En admettant que K a pour coordonnées $(0\,;\,\dfrac{2-x^2}{2})$ et l'égalité (e) donnée à la première question en déduire les coordonnées de H puis l'équation de $(\mathscr{L})$.

Production demandée

– Calculs et démonstration relatifs à la question 4.

Distance de deux droites dans l'espace

Énoncé

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\right)$. A l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, faire figurer les points $A(0\,;\,0\,;\,1)$, $B(\,1\,;\,1\,;\,0)$ et $C(1\,;\,-1\,;\,1)$, les droites (OB) et (AC), un point M mobile sur la droite (OB) et un point N mobile sur la droite (AC).
2. Afficher la distance MN et essayer de placer des points M et N de façon à minimiser cette distance.
   Donner une valeur approximative de cette distance minimale.

Appeler l'examinateur pour vérifier la figure.

3. Combien de couples de points $(M;N)$ répondant à cette condition de distance minimale semble-t-il y avoir ? Afficher les coordonnées de ces points.
4. Quelles semblent être les positions respectives des droites (MN) et (OB) d'une part, et (MN) et (AC) d'autre part ?
   Mettre en évidence cette conjecture, à l'aide du logiciel.

Appeler l'examinateur pour vérification.

5. Calculer MN^2. (On pourra écrire $\overrightarrow{OM} = t\,\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\,\overrightarrow{AC}$)
   Vos résultats confirment-ils certaines de vos conjectures ?

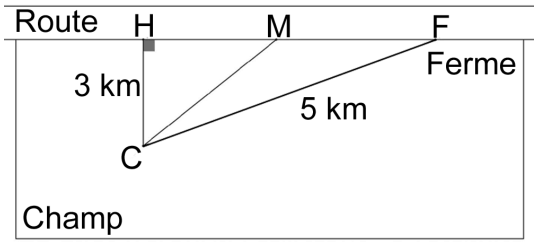
Production demandée

- Réponses aux questions posées dans les questions 2, 3 et 4.
- Calculs et démonstration relatifs à la question 5.

Modélisation d'une situation géométrique

Énoncé

Un agriculteur doit se rendre du point C de son champ à sa ferme F. Il se trouve à 3 kilomètres de la route qui mène à la ferme, et à 5 kilomètres de cette dernière, comme indiqué sur la figure suivante :



On considère que :
* Les points H, M et F sont alignés sur le bord de la route
* $CH = 3; CF = 5$
* La droite (CH) est perpendiculaire à la droite (HF)

On note x la distance HM
Le fermier cherche à économiser sa consommation de carburant. Il sait que sa consommation est :

* d'un litre de carburant par kilomètre parcouru sur la route
* de k litres de carburant par kilomètre parcouru à travers champs (le facteur k, avec $k \geqslant 1$, dépend de l'état du terrain : plus le terrain est accidenté plus k est grand).

On admettra pour réaliser l'étude expérimentale que la fonction "consommation de carburant", notée f_k, est définie par : pour tout réel x de $[0\,;\,4]$,

$$f_k(x) = k\sqrt{x^2 + 9} + 4 - x$$

I Étude expérimentale

1. Recherche de la consommation minimale pour $k = 2$
   On cherche dans cette question à savoir en quel point M il faut rejoindre la route, dans le cas où la consommation à travers champ est le double de celle sur la route.
   (a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, la représentation graphique de la fonction f_2.

(b) Déterminer graphiquement ou à l'aide d'une table de valeurs un encadrement à 10^{-1} près de la distance HM en kilomètres correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.

Appeler l'examinateur.

2. Détermination graphique de la valeur limite k_0

   Le fermier, qui a un grand sens pratique, pense que si k est inférieur à une certaine valeur limite k_0, il n'est pas utile de rejoindre la route et que couper directement à travers champ n'est pas plus cher ! On cherche à vérifier cette affirmation.

   (a) Tracer sur la calculatrice ou le tableur, en choisissant une fenêtre adaptée, les représentations graphiques des fonctions f_k pour

   $$k \in \{1,1\ ;\ 1,2\ ;\ 1,3\ ;\ 1,4\ ;\ 1,5\ ;\ 1,6\ ;\ 1,7\ ;\ 1,8\ ;\ 1,9\ ;\ 2\}$$

   Appeler l'examinateur pour vérification des courbes.

   (b) Calculer $f_k(4)$ et interpréter cette valeur dans le cadre du problème.

   (c) Observer, expliquer et conjecturer la valeur k_0 au-dessous de laquelle il est inutile de chercher à rejoindre la route.

II Détermination de la fonction "consommation"

1. Exprimer CM en fonction de x
2. Démontrer que, pour tout réel x de $[0\ ;\ 4]$ $\quad f_k(x) = k\sqrt{x^2+9} + 4 - x$

Production demandée

- Partie I.
  - 1.(b) Donner la valeur de la distance, en kilomètres, correspondant à la valeur minimale de la consommation de carburant.
  - 2.(b) et 2.(c) Donner la valeur exacte de $f_k(4)$, interprétation. Donner la valeur expérimentale de k_0 et expliquer.
- Partie II.
  - Rédaction des justifications demandées.

Arithmétique : Cryptographie

Énoncé

Le but de cet exercice est le cryptage et décryptage d'un message utilisant le « chiffrement à clef secrète ». On utilisera le codage informatique des lettres avec le code ASCII. Le message choisi est une citation de Mignon McLaughlin (journaliste et écrivain américain, 1913-1983)

I- Expérimentation

Préliminaire : En informatique, le code ASCII consiste à associer à chaque caractère (lettre de l'alphabet, chiffre, signe de ponctuation, ...) un code numérique que l'on appelle son code ASCII.
Par exemple, le code de A est 65, celui de B est 66, celui de a est 97, celui de l'espace est 32... Le code utilisé est un entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant 255$.
Syntaxe : Dans la plupart des tableurs, la fonction «code» renvoie le code ASCII. La fonction réciproque est notée «car». On entre «= code("A")» pour obtenir le nombre 65 et on entre «= car(65)» pour obtenir la lettre A.

1. Cryptage
   (a) En utilisant le code ASCII, coder le message suivant :

   Dans l'arithmétique de l'amour, un plus un égal...

   Dans la zone de saisie du message, on ne mettra qu'une seule lettre par cellule et on n'oubliera pas de taper un espace pour séparer les mots. La zone de saisie du message est la ligne 1 à partir de la cellule B1. Le message codé avec le code ASCII apparaitra sur la ligne 2 à partir de la cellule B2.

   Appeler l'éxaminateur

   (b) Le code ASCII ne constituant pas un codage bien secret, la ligne 3 consiste à crypter le code ASCII en utilisant le cryptage suivant :
   On note C la fonction de cryptage qui, à tout n entier appartenant à $[0; 255]$ associe le reste de la division de $7n$ par 256. Soit $C(n)$ ce reste.
   Compléter le tableau réalisé en 1(a), en y ajoutant à la ligne 3, les restes $C(n)$ correspondant à chaque code n de la ligne 2.

Le tableau ci-dessous donne le début de la phrase et du codage à obtenir :

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*
1	*message*	*D*	*a*	*n*	*s*		*l*		*a*	*r*	*i*	*t*	*h*	*m*
2	*codage ASCII*	68	97	110	115	32	108	32	97	114	105	116	104	109
3	*message codé*	220	167	2	37	224	244	224	167	30	223	44	216	251

2 Décryptage à l'aide de la clef secrète

La fin de la citation de Mignon McLaughlin est cryptée par :

244 224 223 2 202 223 2 223 224 195 44 224 188 195 51 72 224
251 9 223 2 37 224 51 2 224 95 209 167 244 224 86 95 30 9

Pour décrypter la fin de cette citation, on note D la fonction de décryptage qui, à tout entier k appartenant à $[0; 255]$, associe le reste de la division de $183k$ par 256.

Entrer en ligne les nombres cryptés ci-dessus, puis sur une nouvelle ligne, utiliser la fonction D pour lire la fin de la citation de Mignon McLaughlin.

Appeler l'éxaminateur

II- Justifications

1. Justification du codage
   Pour le codage ASCII, deux lettres de l'alphabet sont codées par deux nombres distincts. Il faut s'assurer que le cryptage choisi au I- 1.b code deux nombres n et p distincts, compris entre 0 et 255, par deux nombres distincts.
   (a) Montrer que, si $C(n) = C(p)$ alors $7(n - p) \equiv 0$ modulo 256.
   (b) En déduire que $n = p$. Justifier alors que le codage est valide.
2. Explication du décodage
   (a) Vérifier que $183 \times 7 \equiv 1$ modulo 256 et en déduire que $183 \times (7n) \equiv n$ modulo 256.
   (b) Expliquer pourquoi la fonction D, qui associe à k le reste de la division de $183k$ par 256, assure le décryptage attendu.

Production demandée

1. Partie I : Ecrire le message codé de la première partie de la citation et le message décodé de la fin de la citation.
2. Partie II : Rédaction des justifications demandées.

Equation différentielle et méthode d'Euler

Énoncé

Soit l'équation différentielle : $y' = -2y$. On admet que la fonction f solution de cette équation, définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction f telle que $f(x) = \exp(-2x)$.
On cherche à comparer $f(1)$ aux valeurs approchées obtenues en utilisant la méthode d'Euler avec différents pas.
On se place sur l'intervalle $[0, 1]$ en prenant un pas h égal à $\frac{1}{n}$, où n est un entier supérieur à 2.
On obtient ainsi, dans le plan muni d'un repère, une suite de points notés M_k, d'abscisse x_k et d'ordonnée y_k telles que :
$x_0 = 0$, $y_0 = 1$, et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{n}$ et $y_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) y_k$.
Pour tout entier k compris entre 0 et n, y_k est une valeur approchée de $f(x_k)$.

1. Déterminer l'expression de y_k en fonction de k (n étant une valeur donnée).

> Appeler l'examinateur pour faire vérifier l'expression obtenue pour y_k.

2. À l'aide d'un tableur, reproduire à l'écran et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	k	x_k	yk
10	0	0	1
Pas égal à	1	0,1	0,8
0,1	2	0,2	
	3		
	4		
	5		
	6		
	7		
	8		
	9		
	10		

3. En déduire une valeur approchée de $f(1)$.

> Appeler l'examinateur et lui présenter le tableau de valeurs construit avec $n = 10$.
> Lui expliquer comment modifier le tableau lorsque $n = 20$ ou $n = 30$.

4. Réitérer la méthode dans les cas $n = 20$ puis $n = 30$ et donner les valeurs approchées de $f(1)$ ainsi obtenues. Sur la copie, recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de n égale à	10	20	30	Valeur approchée de e^{-2}
Valeur approchée de y_n				

5. À l'aide du tableur, représenter graphiquement dans un repère du plan la suite des points M_k obtenue à la question 4., dans le cas où n est égal à 30, ainsi que la fonction solution.

Appeler l'examinateur et lui présenter la représentation graphique réalisée.

Production demandée

- Calcul de y_k en fonction de k ;
- Réalisation et visualisation à l'écran de tableaux de valeurs obtenus à l'aide d'un tableur ;
- Détermination de valeurs approchées de $f(1)$ (tableau rempli) ;
- Visualisation à l'écran et si possible impression de la représentation graphique.

Suite définie par récurrence

Énoncé

On définit la suite u pour tout entier n, $n \geqslant 1$ par $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$.

1. (a) A l'aide d'un tableur, afficher les 30 premiers termes de cette suite puis afficher une représentation graphique de ces valeurs.
   (b) Quelle est l'allure du nuage de points obtenu ? Quelle conjecture peut-on faire ?

   Appeler l'examinateur pour vérification.

2. (a) A l'aide du tableur, afficher les 5 premiers termes et une représentation graphique de $v_n = 3u_n$.
   (b) Proposer une expression de v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   (c) Démontrer par récurrence que l'expression de u_n trouvée en 2.(b) est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Production attendue

- Réponse écrite aux questions 1.(b) et 2.(b) et (c).
- Affichage à l'écran des valeurs et représentations graphiques correspondantes avec contrôle par l'examinateur.

Barycentre

Énoncé

On considère A, B et C trois points du plan et k un réel de l'intervalle $[-1;1]$.
On note G_k le barycentre du système de points pondérés :

$$\{(A, k^2+1); (B, k); (C, -k)\}$$

Le but de cet exercice est de déterminer le lieu des points G_k lorsque k décrit l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Visualisation à l'aide d'un logiciel de géométrie :
   (a) Construire les points A,B,C, G_1 et G_{-1}.
   (b) Construire le point G_k puis visualiser l'ensemble des points G_k lorsque k décrit $[-1, 1]$.
   (c) Quelle est la nature de l'ensemble précédent ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Justification mathématique :
   (a) Justifier, pour tout réel k de $[-1;1]$ l'existence du point G_k.
   (b) Démontrer que pour tout réel de l'intervalle $[-1;1]$, on a :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

   (c) Démontrer la conjecture faite avec le logiciel.
   On pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur $[-1;1]$ par

$$f(x) = \frac{-x}{x^2+1}$$

Production attendue

– Réponses écrites aux questions 1.(c) et 2. (a) et (b)
– Obtention à l'écran de la figure demandée à la question 1.

Triangle d'aire maximale

Énoncé

On considère un triangle isocèle de périmètre fixé, égal à 15.

Le but de cet exercice est de déterminer parmi tous les triangles possibles celui dont l'aire est maximale.

1. Expérimentation à l'aide d'un logiciel de géométrie :
   (a) A l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et exactement égal à 15.

   Appeler l'examinateur pour vérification

   (b) Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?

   Appeler l'examinateur pour vérification

2. Démonstration :
   On note x la longueur BC et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de ABC.
   (a) Dans quel intervalle le réel x peut il prendre ses valeurs ?
   (b) Soit H le milieu de $[BC]$, exprimer AH en fonction de x et en déduire que
   $$\mathcal{A}(x) = \frac{x}{4}\sqrt{225 - 30x}$$
   (c) Résoudre le problème posé.

Production attendue

- Réponses écrites aux questions 1.(b) et 2.(a)(b) et (c).
- Obtention à l'écran de la figure correspondant aux hypothèses au 1.(a) avec éventuellement impression.

PGCD

Énoncé

Pour tout entier naturel n, on définit deux entiers a et b en posant :

$$a = 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 5n + 3$$

On s'intéresse aux valeurs du PGCD de a et de b en fonction de n.

1. Conjecture avec un logiciel ou une calculatrice :
   (a) Sur un tableur, créer trois colonnes donnant les valeurs de n, a et b pour n variant de 0 à 100.
   (b) Remplir la quatrième colonne avec les valeurs du PGCD de a et de b.

   Appeler l'examinateur pour vérification.

   (c) Quelles semblent être les valeurs possibles de $\text{PGCD}(a, b)$?
   (d) En observant les résultats obtenus sur le tableur, comment pensez vous pouvoir caractériser les valeurs de n telles que $\text{PGCD}(a, b) = 7$?

   Appeler l'examinateur pour vérification.

2. Démonstrations :
   (a) Démontrer la conjecture faite au 1.(c)
   (b) En raisonnant par disjonction des cas, déterminer les valeurs de n telles que

$$\text{PGCD}(a, b) = 7$$

Production attendue

– Réponses écrites aux questions 1.(c) et (d) et 2.(a) et (b).
– Obtention à l'écran des valeurs demandées avec éventuellement impression.

Famille de cercles

Énoncé

Dans le plan, on considère un triangle OAB rectangle en O, de sens direct, et une droite d passant par O.

On note A' le projeté orthogonal de A sur d, B' le projeté orthogonal de B sur d et (C) le cercle de diamètre $[A'B']$.

Enfin I est le pied de la hauteur issue de O dans OAB.

1. (a) Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

   (b) Quelle conjecture peut-on faire concernant les différents cercles (C) lorsque la droite d tourne autour de O ?

Appeler l'examinateur pour vérification.

2. On considère la similitude directe S de centre I qui transforme A en O.

   (a) Quel est l'angle de cette similitude ? Justifier que l'image de O par S est B.

   (b) Déterminer les images par S des droites (AA') et d, puis celle du point A'.

   (c) Démontrer la conjecture faite au 1.

Production attendue

– Obtention de la figure à l'écran avec contrôle par l'examinateur au 1.

– Réponses écrites aux questions 1. (b) et 2. (a) (b) et (c).

Tangentes à une parabole

Énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On considère la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$.
Étant donné un réel t non nul, on se propose de mettre en évidence, puis de démontrer une propriété du point d'intersection des tangentes à la parabole $\mathscr{C}$ aux points M et M' d'abscisses respectives t et $t' = -\frac{1}{t}$.

1. (a) À l'aide d'un logiciel adapté, tracer la parabole $\mathscr{C}$.
   (b) On se donne un réel t. Placer le point M d'abscisse t sur la courbe $\mathscr{C}$.
   (c) Tracer la droite D tangente à $\mathscr{C}$ au point M.
   Indication : Si le logiciel utilisé le nécessite, calculer d'abord le coefficient directeur de cette tangente.

   Appeler l'examinateur pour qu'il vérifie la construction de $\mathscr{C}$, M et D.

   (d) Placer le point M' d'abscisse $t' = -\frac{1}{t}$ sur la courbe $\mathscr{C}$. Tracer la droite D' tangente à $\mathscr{C}$ en M'.
   Placer le point d'intersection P des droites D et D'.
   (e) Lorsque t varie dans $\mathbb{R}^*$, à quel ensemble le point P semble-t-il appartenir ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite et lui proposer une conjecture.

2. Démonstration
   (a) Donner les équations des droites D et D'.
   (b) Calculer les coordonnées du point P et conclure sur la propriété conjecturée.

Production demandée

- Question 1
  - Visualisation à l'écran et si possible impression de la figure réalisée avec le logiciel ;
  - Rédiger la conjecture relative au point P.
- Question 2
  - Calcul des équations des droites D et D' ;
  - Calcul des coordonnées du point P et conclusion.

Demi-vie

Énoncé

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse (de courte durée). La concentration du médicament dans le sang est immédiatement maximale, puis elle diminue en fonction du temps. On fait l'hypothèse (H) suivante :

La diminution de la concentration entre deux instants t_0 et t_1 est proportionnelle à la fois à la durée $t_1 - t_0$ et à la concentration à l'instant t_0.

On note C_0 la concentration initiale et C_n la concentration au bout de n minutes. (On prendra pour unité de temps la minute et $C_0 = 1$ pour unité de concentration initiale à la fin de l'injection).

1. On admet que l'hypothèse (H) conduit à la relation : $C_{n+1} - C_n = -k\ C_n$, où k est une constante positive.
   (a) Expliciter, pour $n \geqslant 0$, C_{n+1} en fonction de C_n.
   (b) Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
   (c) Exprimer C_n en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour contrôler le résultat obtenu.

2. On choisit $k = 0,035$.
   (a) À l'aide d'un tableur calculer la valeur de C_n pour n allant de 1 à 300. Présenter les résultats dans un tableau comme ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Cn	
2	0	1	
3	1	0,965	
4	2		

   (b) Tracer le nuage de points $(n; C_n)$ représentant l'évolution de la concentration sur 5 heures.

Appeler l'examinateur pour présenter le graphique.

3. **Étude de la demi-vie, c'est-à-dire la période au bout de laquelle la concentration du médicament dans le sang diminue de moitié.**

   (a) **Observations :**
   - Au bout de combien de minutes la concentration initiale aura-t-elle été divisée par deux ? Donner le résultat sous la forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.
   - Quelle est la concentration au bout de 30 minutes ? Donner la valeur approchée à 10^{-2} près.
   - Au bout de combien de minutes, cette dernière concentration aura-t-elle été divisée par deux ? Donner le résultat sous la forme d'un encadrement de deux entiers consécutifs.
   - Que peut-on conjecturer ? Tester cette conjecture sur d'autres durées.

   Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

   (b) **Justification :**
   - Vérifier que pour tout entier naturel n, on a $C_{n+20} \leqslant 0,5\ C_n < C_{n+19}$.
   - Valider la conjecture émise à la question 3(a).

Production demandée

Réponses écrites pour les questions 1 et 3(b).

Étude d'une courbe

Énoncé

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'ensemble des points défini par

$$\mathscr{C} = \left\{ M(x,y) \;\middle|\; x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \right\}$$

1. À l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice graphique, donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathscr{C}$.
   Remarque : on pourra exprimer y en fonction de x.
   On constate que cette représentation graphique est une courbe qui ressemble à un quart de cercle. ***On admet de plus que $\mathscr{C}$ est une courbe tangente aux axes de coordonnées***.

   Appeler le professeur, lui montrer la figure et lui indiquer comment elle a été obtenue.

   On se propose de répondre à la question (Q) : $\mathscr{C}$ est-il un quart de cercle ?
2. Déterminer une équation du cercle Γ tangent aux axes de coordonnées aux mêmes points que $\mathscr{C}$. Le tracer sur la même figure. Quelle réponse à la question (Q) peut-on conjecturer ?

   Appeler le professeur, lui montrer la figure complète, lui indiquer la réponse conjecturée à la question (Q) ainsi que les stratégies prévues pour la démonstration.
3. Démontrer la conjecture trouvée et répondre à la question (Q).

Production demandée

– Recopie d'écran ou impression d'écran donnant $\mathscr{C}$ et Γ mettant en évidence la conjecture.
– Démonstration de la réponse à la question (Q).

Somme de termes d'une suite

Énoncé

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par $u_n = n^3$ et la somme de ses premiers termes $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Donner la somme V_n des $n+1$ premiers termes de la suite arithmétique des entiers naturels soit $V_n = 0 + 1 + \cdots + n$.
2. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de S_n pour n allant de 1 à 30.

> Appeler le professeur, lui montrer les calculs des termes $S_1,\ S_2 \ldots,\ S_{30}$ et lui indiquer la formule donnant V_n.

3. Avec un tableur ou une calculatrice programmable, calculer la valeur de V_n^2 dans les mêmes cas particuliers. Que constate-t-on ?

> Appeler le professeur, lui montrer les calculs des termes S_n et V_n^2 pour n de 1 à 30. Lui indiquer la formule conjecturée et la méthode retenue pour la démonstration.

4. À partir du constat ci-dessus, conjecturer une formule donnant la valeur de S_n en fonction de n, puis la démontrer.
   On suggère une démonstration par récurrence.

Production demandée

– Formule donnée sans démonstration exprimant V_n en fonction de n.
– Tableau des valeurs exactes des suites S_n et V_n^2 pour n de 1 à 30 (par exemple en imprimant la feuille de calcul).
– Formule, donnant S_n en fonction de n, conjecturée à partir du tableau précédent.
– Démonstration de la formule donnant S_n en fonction de n.

Partage d'un triangle

Énoncé

Dans le plan on définit un triangle ABC non isocèle en A et dont les angles en B et en C sont aigus. On note a son aire.
On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et l'on se place dans le cas où $CH > BH$.
On se propose de démontrer qu'il existe une droite et une seule perpendiculaire au côté $[BC]$, en un point M, qui partage le triangle ABC en deux polygones de même aire.

1. Construire la figure demandée en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Déterminer, à l'aide du logiciel, la position de M en lequel la droite recherchée doit couper le segment $[CH]$ pour répondre au problème posé.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure construite.

2. Etudier le cas où le point M est sur le segment $[BH]$.

   Appeler l'examinateur afin qu'il vérifie la formulation de votre conclusion.

3. On suppose que le point M est situé sur le segment $[CH]$ et on pose $CM = x$. On appelle N le point d'intersection du segment $[AC]$ avec la droite perpendiculaire à (BC) passant par M.
   On note L la longueur du segment $[CH]$. On admet que la fonction f qui, à tout x de $[0; L]$, associe l'aire du triangle CMN est continue.
   On ne cherchera pas à expliciter *f(x)*.
   (a) Que traduit l'égalité $f(x) = \dfrac{a}{2}$?
   (b) Préciser les variations de f à l'aide du logiciel. Déterminer la valeur de $f(0)$.
   (c) Comparer $f(x)$ et $\dfrac{a}{2}$ quand M est en H.
   (d) En déduire la réponse au problème posé.

Production demandée

– Figure réalisée avec emplacement du point M répondant au problème.
– Interprétation de l'égalité 3a).
– Utilisation d'un théorème d'analyse.

Suite de Syracuse

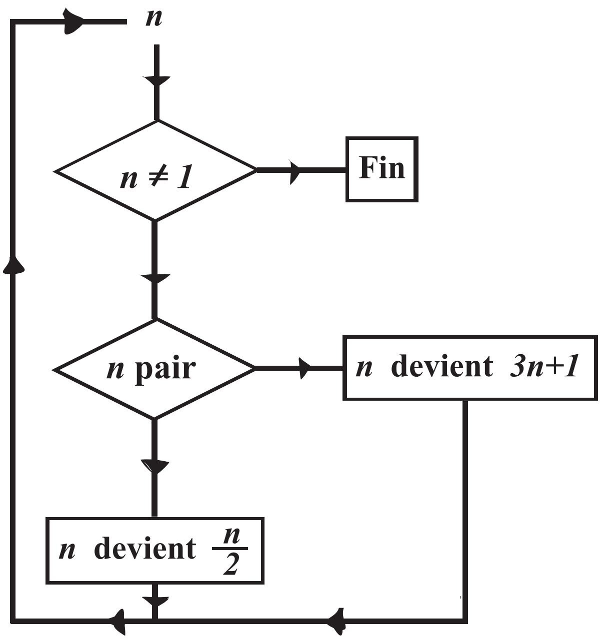
Énoncé

À tout n entier naturel ($n \geqslant 1$), on applique l'algorithme suivant :
Si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :

– si n est pair, on le transforme en $\dfrac{n}{2}$,
– si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.
On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce n.

Lorsque, pour l'entier n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle " suite de Syracuse associée à n " la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1.
On note $\mathscr{L}(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $\mathscr{L}(n)$ est la longueur de la suite de Syracuse associée à n.

Exemple : pour $n = 5$ *on obtient successivement les nombres* $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ *et donc* $\mathscr{L}(5) = 6$.



1. (a) À l'aide d'un tableur, appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.
   (b) Compléter alors la feuille de calcul en donnant les suites de Syracuse des 100 premiers entiers.
   (c) Préciser les valeurs de $\mathscr{L}(26)$ et $\mathscr{L}(27)$.

Appeler l'examinateur pour vérification du tableau construit.

2. Etude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites $\mathscr{L}(n)$ pour n entier naturel.
   (a) Quelle est la longueur des suites de Syracuse associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?
   (b) Que remarque-t-on quant aux suites de Syracuse associées aux nombres de la forme $8k+4$ et $8k+5$ pour $k \in N^*$.

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures émises.

   (c) Démontrer conjecture émise en 2b).
3. Démontrer que si le reste de la division euclidienne de n par 4 est 0, 1 ou 2 alors l'algorithme amène nécessairement, au bout d'un certain nombre d'étapes, à un entier strictement inférieur à n.

La conjecture de Syracuse affirme que pour tout entier non nul n le processus aboutit à 1. La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle prévisible, en toute généralité.

Production demandée

– Construction du tableau des suites de Syracuse pour les 10 premiers entiers.
– Le tableau pour les 100 entiers sera simplement visé par l'examinateur.
– Énoncé des conjectures du 2)
– Preuve de 2b) et de 3).