Ajustements affines

Référence : BO N°4 12 JUIN 1997 HS

Statistique descriptive

Les méthodes de la statistique descriptive sont appliquées au traitement de l'information chiffrée, provenant notamment de la vie économique et sociale. Les activités feront largement usage des moyens informatiques disponibles et seront un lieu privilégié de travail interdisciplinaire. Il est souhaitable que les documents utilisés soient authentiques.

Les séries statistiques à deux variables ont été abordées en classe de première par des tableaux d'effectifs ou de fréquences, les fréquences marginales et conditionnelles, les problèmes de sous et sur-représentation. En classe de terminale, l'objectif est de sensibiliser les élèves aux problèmes de traitements de données statistiques.

Séries statistiques à deux variables	
Nuage de points associés à une série statistique à deux variables. Point moyen.	À cette occasion, on rappellera l'utilisation des paramètres de position et de dispersion attachés à chacune des variables.
Ajustements affines	
Calcul de la somme des résidus $\sum_{\iota}(y_i - \alpha x_i - \beta)^2$ associés à de tels ajustements.	L'objectif est de faire percevoir le sens de l'expression "moindres carrés"..
Ajustement affine par moindres carrés.	Les formules d'ajustement par moindres carrés seront admises et exprimées en terme de variance et de covariance. Elles seront démontrées dans l'enseignement de spécialité
Coefficient de corrélation linéaire.	On l'interprètera en exprimant la somme des carrés des résidus à l'aide se son carré, et on montrera que cette somme est nulle si et seulement si le coefficient de corrélation linéaire est égal à 1 ou à -1 ; les variables sont alors liées par une relation affine.
Travaux pratiques :	
Exemples de comparaison des prévisions faites à partir de plusieurs ajustements d'une même série statistique à deux variables.	
Exemples de comparaison de la somme des résidus pour divers ajustements affines par des méthodes graphiques.	
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ	
Ajustement affine par moindres carrés : démonstration	On pourra traiter la démonstration soit comme exemple de problème d'optimisation d'une fonction de deux variables, soit comme application géométrique de la moindre distance d'un point à un plan.
Travaux pratiques	
Exemples de changement d'origine et d'échelle sur l'ajustement affine par moindres carrés.	On pourra par exemple centrer et réduire les variables.
Exemples d'ajustement.	On pourra proposer des situations qui suggèrent des ajustements autres qu'affines. Ce pourra être l'occasion d'utiliser les papiers semi-log ou log-log. On pourra exploiter sur des exemples des situations d'ajustements se ramenant à des ajustements affines. Mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions, et toute les indications utiles doivent être données.

Quelques ajustements affines

On considère le tableau de données ci-dessous présentant le taux d'alphabétisation des femmes (X_i en %) de huit pays ainsi que le taux de mortalité infantile(Y_i en ‰).

i	1 Inde	2 Koweit	3 Mauritanie	4 France	5 Ghana	6 Congo	7 Venezuella	8 Japon
X_i	25,7	69,6	17	98,7	42,8	55,4	87,8	100
Y_i	95	34	127	7,7	90	73	25,1	5

Les chiffres du Monde, Universalis, 1990

1. Ajustement affine par la méthode Med-Med[1]

Cette méthode d'ajustement consiste à partager les données en trois groupes après un tri en fonction des valeurs de la première variable.

- Si l'effectif total n est égal à $3p$, chaque groupe comporte p éléments.
- Si l'effectif total n est égal à $3p + 1$, le deuxième groupe comporte $p + 1$ éléments.
- Si l'effectif total n est égal à $3p + 2$, le premier et le troisième groupe comporte $p + 1$ éléments.

On calcule ensuite les médianes des valeurs de x et de y pour chacun des groupes. On obtient ainsi 3 points $M_1(\text{medx}_1,\text{medy}_1)$, $M_2(\text{medx}_2,\text{medy}_2)$ et $M_3(\text{medx}_3,\text{medy}_3)$.
On construit ensuite la droite passant par le point moyen de ces trois points (moyenne des abscisses, moyenne des ordonnées), et parallèle à la droite (M_1M_3).

2. Ajustement affine par la méthode de Mayer

Cette méthode d'ajustement consiste à partager les données en deux groupes de mêmes effectifs (à un près) après un tri en fonction des valeurs de la première variable.
On calcule ensuite les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de chaque groupe. On construit alors la droite (G_1G_2).

3. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Cette méthode consiste à rendre minimale la somme des résidus. On obtient la droite de régression de y en x.

Questions

1. Déterminer les équations des droites obtenues par chacune des trois méthodes.
2. Calculer la somme des résidus dans chacun des cas.
3. Montrer que la droite passant par le point moyen du nuage et parallèle à la droite obtenue par la méthode Med-Med est une meilleure approximation affine au sens des moindres carrés.

Cours

1. Montrer que la somme des différences est nulle si et seulement si la droite passe par le point moyen du nuage.
2. Montrer que, parmi toutes les droites de coefficient directeur a, celle qui minimise la somme des résidus est celle qui passe par le point moyen du nuage.
3. Montrer que, parmi toutes les droites qui passent par le point moyen du nuage, il en existe une qui minimise la somme des résidus. C'est la droite de régression de y en x.
4. En déduire que, parmi toutes les droites du plan, la droite de régression de y en x est celle qui minimise la somme des résidus.

[1] Cette méthode est présente sur certaines calculatrices, notamment sur les TI-82 TI-83, TI-89, TI-92

Corrigé

Dans un premier temps il convient de trier les données en fonction des valeurs de Xi. On obtient le tableau :

i	3 Mauritanie	1 Inde	5 Ghana	6 Congo	2 Koweit	7 Venezuella	4 France	8 Japon
X_i	17	25,7	42,8	55,4	69,6	87,8	98,7	100
Y_i	127	95	90	73	34	25,1	7,7	5

Méthode Med-Med

Premier groupe : $M_1(25,7 ; 95)$

i	3 Mauritanie	1 Inde	5 Ghana
X_i	17	25,7	42,8
Y_i	127	95	90

Deuxième groupe : $M_2(62,5 ; 53,5)$

i	6 Congo	2 Koweit
X_i	55,4	69,6
Y_i	73	34

Troisième groupe : $M_3(98,7 ; 7,7)$

i	7 Venezuella	4 France	8 Japon
X_i	87,8	98,7	100
Y_i	25,1	7,7	5

Point moyen de ces trois points : $M_0(62,3 ; 52,09)$
Coefficient directeur de la droite (M_1M_3) : -1,19589
Equation : $y = -1,19589\, x + 126,57$
Somme des résidus : 910,3
La droite parallèle passant par le point moyen du nuage a pour équation : $y = -1,19589\, x + 131,39$
Avec elle, on obtient pour somme des résidus : 724,1

Méthode de Mayer

Premier groupe : $G_1(35,225 ; 96,25)$

i	3 Mauritanie	1 Inde	5 Ghana	6 Congo
X_i	17	25,7	42,8	55,4
Y_i	127	95	90	73

Second groupe : $G_2(89,025 ; 17,95)$

i	2 Koweit	7 Venezuella	4 France	8 Japon
X_i	69,6	87,8	98,7	100
Y_i	34	25,1	7,7	5

Droite (G_1G_2) : $y = -1,4554\, x + 147,516$
Somme des résidus : 508,4
Cette droite passe par le point moyen du nuage. Les spécialistes le démontreront par les barycentres.

Méthode des moindres carrés

Point moyen du nuage : $G(62,125 ; 57,1)$
Droite de régression de y en x : $y = -1,3828\, x + 143,008$
Somme des résidus : 470,1

Droite d'ajustement de y en x

On considère une série double (x_i, y_i) pour i entier de 1 à n telle que tous les x_i ne soient pas égaux.

On veut ajuster le nuage de points par une droite d d'équation : $y = a.x + b$.
On appelle G $(\bar{x}, \bar{y})$ le point moyen de cette série.

Théorème 1

La somme des différences $s = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a.x_i + b))$ est nulle si et seulement si la droite d passe par G, le point moyen de la série.

Démonstration

$$s = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a.x_i + b)) = \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a.x_i - \sum_{i=1}^{n} b = \sum_{i=1}^{n} y_i - a.\sum_{i=1}^{n} x_i - n.b \, .$$

$\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ donc $\sum_{i=1}^{n} x_i = n.\bar{x}$ et de même $\sum_{i=1}^{n} y_i = n.\bar{y}$.

On a alors : $s = n.\bar{y} - a.n.\bar{x} - n.b = n.(\bar{y} - a.\bar{x} - b)$.

Donc s est nulle si et seulement si $\bar{y} - a.\bar{x} - b = 0$ ce qui signifie que la droite passe par le point moyen G.

Théorème 2

Parmi toutes les droites de coefficient directeur a, celle qui minimise la somme des résidus $S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a.x_i + b))^2$ est celle qui passe par le point moyen G.

Démonstration

$$(y_i - (a.x_i + b))^2 = ((y_i - a.x_i) - b)^2 = b^2 - 2b.(y_i - a.x_i) + (y_i - a.x_i)^2 \, .$$

Donc : $S = \sum_{i=1}^{n} \left(b^2 - 2b.(y_i - a.x_i) + (y_i - a.x_i)^2\right) = n.b^2 - 2b.\sum_{i=1}^{n} (y_i - a.x_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - a.x_i)^2$.

Le coefficient directeur a étant fixé, S est donc une fonction de b.
C'est une fonction trinôme du second degré dont le coefficient de b^2 est positif ; elle admet donc un minimum pour :

$$b = -\frac{-2\sum_{i=1}^{n} (y_i - a.x_i)}{2n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a.\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{n.\bar{y} - a.n.\bar{x}}{n} = \bar{y} - a.\bar{x} \, .$$

L'équation de d devient donc : $y = a.x + \bar{y} - a.\bar{x}$ autrement dit $y = a.(x - \bar{x}) + \bar{y}$.
Elle passe bien par le point moyen G.

Illustration du calcul de S pour $n = 8$

Point			
1	$(y_1 - (ax_1 + b))^2$	$((y_1 - ax_1) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_1 - ax_1) + (y_1 - ax_1)^2$
2	$(y_2 - (ax_2 + b))^2$	$((y_2 - ax_2) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_2 - ax_2) + (y_2 - ax_2)^2$
3	$(y_3 - (ax_3 + b))^2$	$((y_3 - ax_3) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_3 - ax_3) + (y_3 - ax_3)^2$
4	$(y_4 - (ax_4 + b))^2$	$((y_4 - ax_4) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_4 - ax_4) + (y_4 - ax_4)^2$
5	$(y_5 - (ax_5 + b))^2$	$((y_5 - ax_5) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_5 - ax_5) + (y_5 - ax_5)^2$
6	$(y_6 - (ax_6 + b))^2$	$((y_6 - ax_6) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_6 - ax_6) + (y_6 - ax_6)^2$
7	$(y_7 - (ax_7 + b))^2$	$((y_7 - ax_7) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_7 - ax_7) + (y_7 - ax_7)^2$
8	$(y_8 - (ax_8 + b))^2$	$((y_8 - ax_8) - b))^2$	$b^2 - 2b(y_8 - ax_8) + (y_8 - ax_8)^2$
Total	$S =$		$8.b^2 - 2b.\sum_{i=1}^{8}(y_i - a.x_i) + \sum_{i=1}^{8}(y_i - a.x_i)^2$

Illustration numérique pour l'exemple étudié en introduction

Point			
1	$(95-(25{,}7a+b))^2$	$((95-25{,}7a)-b))^2$	$b^2-2b(95-25{,}7a)+(95-25{,}7a)^2$
2	$(34-(69{,}6a+b))^2$	$((34-69{,}6a)-b))^2$	$b^2-2b(34-69{,}6a)+(34-69{,}6a)^2$
3	$(127-(17a+b))^2$	$((127-17a)-b))^2$	$b^2-2b(127-17a)+(127-17a)^2$
4	$(7{,}7-(98{,}7a+b))^2$	$((7{,}7-98{,}7a)-b))^2$	$b^2-2b(7{,}7-98{,}7a)+(7{,}7-98{,}7a)^2$
5	$(90-(42{,}8a+b))^2$	$((90-42{,}8a)-b))^2$	$b^2-2b(90-42{,}8a)+(90-42{,}8a)^2$
6	$(73-(55{,}4a+b))^2$	$((73-55{,}4a)-b))^2$	$b^2-2b(73-55{,}4a)+(73-55{,}4a)^2$
7	$(25{,}1-(87{,}8a+b))^2$	$((25{,}1-87{,}8a)-b))^2$	$b^2-2b(25{,}1-87{,}8a)+(25{,}1-87{,}8a)^2$
8	$(5-(100a+b))^2$	$((5-100a)-b))^2$	$b^2-2b(5-100a)+(5-100a)^2$
Total	$S =$		$8b^2-2b(456{,}8-497a)+(38\,145{,}2a^2-36\,653{,}7a+40\,453{,}3)$

Donc $b = 57{,}1-62{,}125a$

Théorème 3

Parmi toutes les droites qui passent par le point moyen de la série, il en existe une et une seule qui minimise la somme des résidus.

Démonstration

On part d'une droite d passant par le point moyen donc d'équation : $y = a.(x - \bar{x}) + \bar{y}$.

$$\left(y_i - (a.(x - \bar{x}) + \bar{y})\right)^2 = \left((y_i - \bar{y}) - a.(x_i - \bar{x})\right)^2 = a^2.(x_i - \bar{x})^2 - 2a.(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (y_i - \bar{y})^2.$$

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(a^2.(x_i - \bar{x})^2 - 2a.(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + (y_i - \bar{y})^2\right)$$

$$= a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

C'est une fonction du second degré en a dont le coefficient de a^2 est positif ; elle admet donc un minimum pour : $a = -\dfrac{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

La droite qui minimise la somme des résidus existe donc et est unique.

Illustration du calcul de S pour $n = 8$

Point			
1	$(y_1-(a*(x_1-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_1-\acute{y})-a*(x_1-\bar{x}))^2$	$(x_1-\bar{x})^2a^2-2(y_1-\acute{y})(x_1\ \bar{x})a+(y_1-\acute{y})^2$
2	$(y_2-(a*(x_2-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_2-\acute{y})-a*(x_2-\bar{x}))^2$	$(x_2-\bar{x})^2a^2-2(y_2-\acute{y})(x_2\ \bar{x})a+(y_2-\acute{y})^2$
3	$(y_3-(a*(x_3-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_3-\acute{y})-a*(x_3-\bar{x}))^2$	$(x_3-\bar{x})^2a^2-2(y_3-\acute{y})(x_3\ \bar{x})a+(y_3-\acute{y})^2$
4	$(y_4-(a*(x_4-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_4-\acute{y})-a*(x_4-\bar{x}))^2$	$(x_4-\bar{x})^2a^2-2(y_4-\acute{y})(x_4\ \bar{x})a+(y_4-\acute{y})^2$
5	$(y_5-(a*(x_5-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_5-\acute{y})-a*(x_5-\bar{x}))^2$	$(x_5-\bar{x})^2a^2-2(y_5-\acute{y})(x_5\ \bar{x})a+(y_5-\acute{y})^2$
6	$(y_6-(a*(x_6-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_6-\acute{y})-a*(x_6-\bar{x}))^2$	$(x_6-\bar{x})^2a^2-2(y_6-\acute{y})(x_6\ \bar{x})a+(y_6-\acute{y})^2$
7	$(y_7-(a*(x_7-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_7-\acute{y})-a*(x_7-\bar{x}))^2$	$(x_7-\bar{x})^2a^2-2(y_7-\acute{y})(x_7\ \bar{x})a+(y_7-\acute{y})^2$
8	$(y_8-(a*(x_8-\ddot{u})+\acute{y}))^2$	$((y_8-\acute{y})-a*(x_8-\bar{x}))^2$	$(x_8-\bar{x})^2a^2-2(y_8-\acute{y})(x_8\ \bar{x})a+(y_8-\acute{y})^2$
Total	$S =$		$a^2\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})^2-2a\sum_{i=1}^{8}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})+\sum_{i=1}^{8}(y_i-\bar{y})^2$

Illustration numérique pour l'exemple étudié en introduction

Point			
1	$(95-(a*(25{,}7-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(37{,}9+36{,}425a)^2$	$1326{,}78a^2+2761{,}02a+1436{,}41$
2	$(34-a*(69{,}6-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(-23{,}1-7{,}475a)^2$	$55{,}8756a^2+345{,}345a+533{,}61$
3	$(127-a*(17-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(69{,}9+45{,}125a)^2$	$2036{,}27a^2+6308{,}47a+4886{,}01$
4	$(7{,}7-a*(98{,}7-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(-49{,}4-36{,}575a)^2$	$1337{,}73a^2+3613{,}61a+2440{,}36$
5	$(90-a*(42{,}8-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(32{,}9+19{,}325a)^2$	$373{,}456a^2+1271{,}59a+1082{,}41$
6	$(73a*(55{,}4-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(15{,}9+6{,}725a)^2$	$45{,}2256a^2+213{,}855a+252{,}81$
7	$(25{,}1-a*(87{,}8-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(-32-25{,}675a)^2$	$659{,}206a^2+1643{,}2a+1024$
8	$(5-a*(100-62{,}125)+57{,}1)^2$	$(-52{,}1-37{,}875a)^2$	$1434{,}52a^2+3946{,}58a+2714{,}41$
Total	$S =$		$7269{,}06a^2+20103{,}7a+14370$

Donc $a = -1{,}38282$ et $b = 57{,}1-62{,}125a = 143{,}008$

Définitions

On appelle « droite d'ajustement de y en x » de la série double (x_i, y_i) la droite d'équation $y = a.x + b$

où $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$ et $b = \bar{y} - a.\bar{x}$.

On appelle « covariance de la série double » le nombre : $\sigma_{xy} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$.

L'écart type de la série (x_i) étant : $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$, on peut écrire le coefficient directeur de la droite d'ajustement : $a = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$.

Lien entre statistique et géométrie dans l'espace

Quelques résultats simples

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On désigne par Δ la droite passant par O(0;0;0) et Ω(1;1;1).

Soit x_1, x_2, x_3 une série statistique simple de trois valeurs. On peut la représenter dans $\mathbb{R}^3$ par le point $X(x_1;x_2;x_3)$.

1. On désigne par H la projection orthogonale de X sur Δ.
   a. Les coordonnées de H sont $\left(\bar{x};\bar{x};\bar{x}\right)$
   b. La distance XH est $\sqrt{3}\,\sigma_x$

2. Changement d'échelle.
   Soit X_1 le point de coordonnées ($a\,x_1$; $a\,x_2$; $a\,x_3$) et H_1 sa projection orthogonale sur Δ.
   a. Les coordonnées de H_1 sont $\left(a\bar{x};a\bar{x};a\bar{x}\right)$.
   b. La distance XH_1 est égale à $|a|$.XH

   $$\text{On en tire que :}\begin{cases}\overline{ax}=a\bar{x}\\ \sigma_{ax}=|a|\sigma_x\end{cases}$$

3. Changement d'origine.
   Soit X_2 le point de coordonnées (x_1+b ; x_2+b ; x_3+b) et H_2 sa projection orthogonale sur Δ.
   a. Les coordonnées de H_2 sont $\left(\bar{x}+b;\bar{x}+b;\bar{x}+b\right)$.
   b. La distance XH_2 est égale à XH

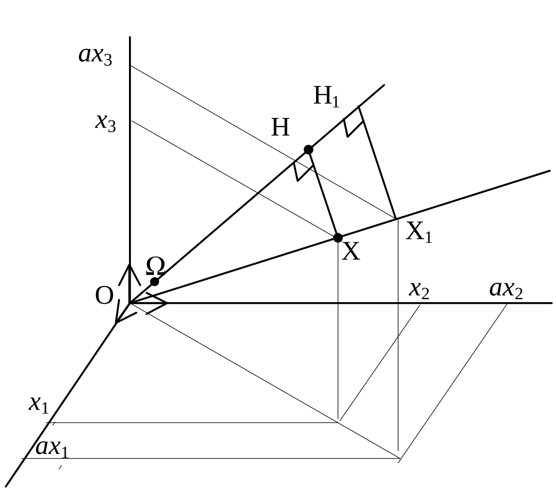
   $$\text{On en tire que :}\begin{cases}\overline{x+b}=\bar{x}+b\\ \sigma_{x+b}=\sigma_x\end{cases}$$

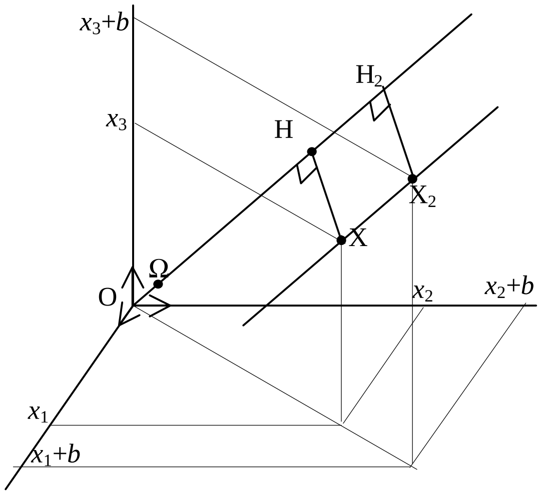
4. Changement d'origine et d'échelle.
   Soit X_3 le point de coordonnées ($a\,x_1+b$; $a\,x_2+b$; $a\,x_3+b$) et H_3 sa projection orthogonale sur Δ.
   a. Les coordonnées de H_3 sont $\left(a\bar{x}+b;a\bar{x}+b;a\bar{x}+b\right)$.
   b. La distance XH_3 est égale à $|a|$.XH

   $$\text{On en tire que :}\begin{cases}\overline{ax+b}=a\bar{x}+b\\ \sigma_{ax+b}=|a|\sigma_x\end{cases}$$

Remarque :

Ces résultats peuvent être généralisés dans $\mathbb{R}^n$.





Démonstration géométrique des moindres carrés

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On désigne par Δ la droite passant par O(0;0;0) et Ω(1;1;1).

On étudie une série statistique double de trois valeurs

X	x_1	x_2	x_3
Y	y_1	y_2	y_3

où les x_i ne sont pas tous égaux.

On peut la représenter dans $\mathbb{R}^3$ par les deux points X(x_1;x_2;x_3) et Y(y_1;y_2;y_3).

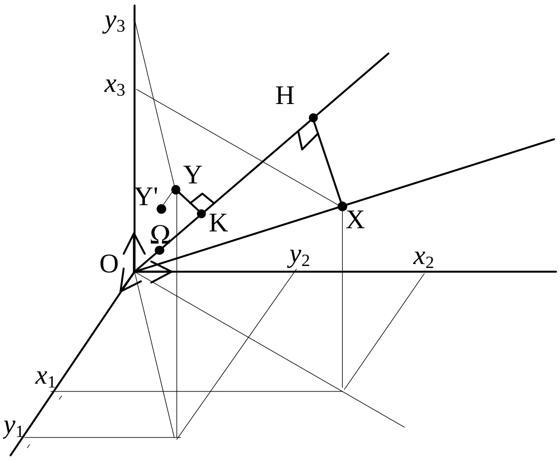
1. Les points O, X et Ω ne sont pas alignés donc (O; $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{O\Omega}$) est un repère du plan OXΩ.

   Pour tout point M de ce plan, il existe un seul couple (*a;b*) tel que $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{O\Omega}$

   Le calcul de YM² donne $\sum_i [y_i-(ax_i+b)]^2$

   En conséquence le minimum est atteint lorsque M est le projeté orthogonal de Y sur le plan OXΩ.
   On notera Y' ce point.
   Il est unique donc il existe un seul couple (*a;b*) rendant minimale la somme des résidus.

2. Recherche du couple (*a;b*) rendant minimale la somme des résidus.



On note respectivement H et K les projetés orthogonaux de X et Y sur Δ.
Soit Y' le projeté orthogonal de Y sur le plan OXΩ.

$$\overrightarrow{OY'}=a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{O\Omega}\ \text{ et }\ \overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OY'}+\overrightarrow{Y'Y}\qquad\text{donc } \overrightarrow{OY}=a\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{O\Omega}+\overrightarrow{Y'Y}$$

<u>Pour calculer *b*</u>, on va calculer le produit scalaire $\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OY}$

$$\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OY}=a\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OX}+b\overrightarrow{O\Omega}^2+\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{Y'Y}\ \text{ or }\ \overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{Y'Y}=0\ ;\ \overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OX}=3\bar{x}\ \text{ et }\ \overrightarrow{O\Omega}^2=3$$

donc $\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OY}=3\left(a\bar{x}+b\right)$

or par définition, K étant le projeté orthogonal de Y sur Δ, $\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{O\Omega}.\overrightarrow{OK}=3\bar{y}$

donc $\bar{y}=a\bar{x}+b$ et par suite, $\boxed{b=\bar{y}-a\bar{x}}$.

<u>Pour calculer *a*</u>, on va calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}$

$$\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}=a\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OX}\qquad\text{car }\ \overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OH}=0\ \text{ et }\ \overrightarrow{HX}.\overrightarrow{Y'Y}=0$$

$$\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}=a\overrightarrow{HX}.\left(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HX}\right)=a\mathrm{HX}^2\qquad\text{or }\ \mathrm{HX}=\sqrt{3}\sigma_x$$

donc $\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}=3a\sigma_x^{\ 2}$ d'où $a=\dfrac{\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}}{3\sigma_x^{\ 2}}$

D'autre part on a aussi :

$$\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{HX}.\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KY}\right)=\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{KY}\qquad\text{car }\ \overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OK}=0$$

or $\overrightarrow{HX}\left(x_1-\bar{x};x_2-\bar{x};x_3-\bar{x}\right)$ et $\overrightarrow{KY}\left(y_1-\bar{y};y_2-\bar{y};y_3-\bar{y}\right)$

donc $\overrightarrow{HX}.\overrightarrow{OY}=\sum_i\left(x_i-\bar{x}\right)\left(y_i-\bar{y}\right)=3\sigma_{xy}$ On en tire que : $\boxed{a=\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}}$