Arbres pondérés

Référence aux programmes de S et de ES

Programme de terminale S

Calcul de probabilités	On introduira les arbres pondérés. On en explicitera les règles de fonctionnement pour leur utilisation comme outil de démonstration.

Programme de terminale ES

Calcul de probabilités	On introduira les arbres pondérés. Prenant appui sur le travail fait en première, on en explicitera les règles de fonctionnement pour leur utilisation comme outil de calcul.

Vocabulaire sur les arbres pondérés

Un arbre se construit de gauche à droite ou de haut en bas.

Le vocabulaire le plus souvent rencontré utilise les mots : racine ou origine, nœud, branche et chemin.

On parle également de feuille, de niveau ou profondeur (d'un nœud ou d'une feuille), de hauteur (de l'arbre).

La racine de l'arbre est l'événement certain, l'univers, Ω ; c'est le premier nœud.

De ce nœud partent des branches qui mènent à des évènements. Sur chaque branche se note la probabilité de l'événement auquel elle conduit. La somme des probabilités des évènements accrochés à un nœud est égale à 1.

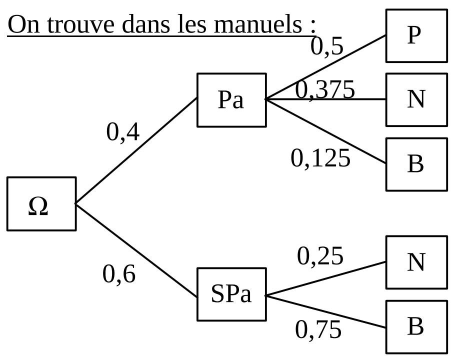
De chacun de ces évènements, qui sont des nouveaux nœuds, peuvent partir de nouvelles branches sur lesquelles sont notées des probabilités conditionnelles…

Exemple

Le matin, Monsieur X prend son parapluie 4 fois sur 10. Sa voisine a noté que, lorsqu'il prend son parapluie, il pleut 1 fois sur 2, le temps est nuageux 3 fois sur 8, sinon il fait beau, alors que, lorsqu'il ne prend pas son parapluie, il fait beau 3 fois sur 4 et le temps est nuageux 1 fois sur 4.

Traduire à l'aide d'un arbre les données de l'énoncé.

On trouve dans les manuels :



Le chemin suivi en partant de la racine Ω et en allant jusqu'à une feuille permet d'obtenir un événement $A \cap B$.

Par exemple le chemin ΩPaN permet d'obtenir l'événement $Pa \cap N$ ("Pa et N").

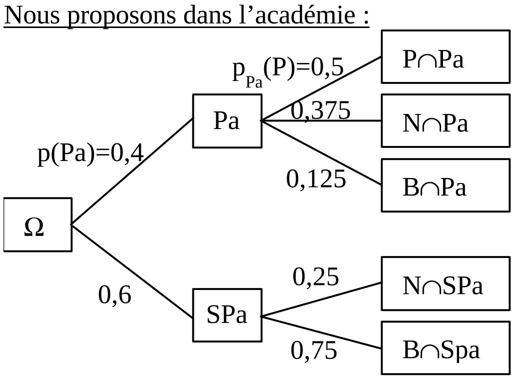
Sur ce chemin, 0,4 est la probabilité que Monsieur X prenne son Parapluie (Pa) et 0,375 est la probabilité que le temps soit nuageux sachant que Monsieur X a pris son parapluie.

Si on demande à l'élève de calculer la probabilité que le temps soit nuageux, doit-il compléter l'arbre en indiquant les probabilités de $Pa \cap N$ et de $SPa \cap N$ en face des feuilles correspondantes ?

Le risque est grand alors qu'il confonde les probabilités conditionnelles avec les évènements indépendants. Il est peut être préférable qu'il calcule les probabilités des intersections directement sur l'arbre, sans les noter.

Il notera alors : $p(Pa \cap N) = 0{,}15$ et $p(SPa \cap N) = 0{,}15$ donc $p(N) = 0{,}3$

Nous proposons dans l'académie :



Remarques

Nous avons délibérément choisi la notation $p_B(A)$ plutôt que $p(A|B)$ pour éviter, chez les élèves, la confusion consistant à croire que A|B est un événement.

La structure de l'arbre semble suggérer une hiérarchie, c'est un défaut car cela donne la part trop belle à la chronologie et cela crée des problèmes quand on retourne l'arbre.

C'est pourquoi il est sans doute préférable de ne pas introduire les arbres pondérés sur des exemples de tirages successifs.

Il est également nécessaire de donner dès le départ des arbres "non symétriques". Trop d'élèves pensent que les arbres sont toujours symétriques et se dispensent donc de les dessiner.

Construction de l'arbre à l'envers

Cet arbre retourné va indiquer les probabilités qu'il pleuve, qu'il fasse beau ou que le temps soit nuageux. Il indiquera également la probabilité que Monsieur X prenne ou non son parapluie sachant le temps qu'il fait.