

Il est proposé aux stagiaires de classer ces exercices en trois catégories ; « exigibles, activités et hors programme ».

Arithmétique en terminale S, enseignement de spécialité.

Exercices et problèmes :

- 1) Quelles sont les valeurs de l'entier p telles que $p - 1$ divise $p + 11$?
- 2) a et b désignent des nombres entiers. Montrer que $a^2 + b^2$ est divisible par 3 si et seulement si a et b le sont.
- 3) On donne deux entiers a et b avec $a > b$. On effectue les divisions euclidiennes de a et b par $a - b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.
- 4) Dans la division euclidienne de a par b , le quotient est 4, le reste est r , déterminer les nombres a , b , r tels que $a + b + r = 79$.
- 5) Comment faut-il choisir l'entier n pour que $2^n - 1$ soit divisible par 9 ? Cette condition étant vérifiée, montrer que $2^n - 1$ est divisible par 63.
- 6) Reste de la division euclidienne de 4^{1998} par 7 ?
- 7) Résoudre dans \mathbb{Z} l'équation suivante d'inconnue x : $3x^2 + 4x \equiv 0 \pmod{21}$.
- 8) Vérifier que pour $n = 3$, on a $n^2 + n + 1 = 13$. Trouver tous les entiers n tels que $n^2 + n + 1$ soit multiple de 13.
- 9) 4 est le chiffre des unités d'un entier x . A quelle condition, l'écriture de x^2 dans le système décimal se termine-t-elle par 16 ?
- 10) Un nombre s'écrit $aabb$ dans le système décimal ; peut-il être un carré ?
- 11) Soit le nombre 120450. Par quels chiffres doit-on remplacer les deux zéros pour que le nouveau nombre obtenu soit divisible par 99 ?
- 12) Etablir le critère de divisibilité des entiers par 11. Déterminer x pour que le nombre à écriture décimale $x2x31$ soit divisible par 11.
- 13) Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme des carrés s'écrit $xxxx$ dans le système décimal.
- 14) Déterminer les entiers x et y solutions de l'équation $4x - 3y = 11$. Quelle est la valeur maximale du p.g.c.d. de x et y ? Déterminer x et y correspondant à cette valeur maximale.

15) Prouver que quel que soit l'entier k , $2k + 1$ et $9k + 4$ sont premiers entre eux. En est-il de même de $2k - 1$ et $9k + 4$?

16) Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Sachant que 2 et 3 sont premiers entre eux : prouver que $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, f(x) \in \mathbb{Z}\}$ est non vide ; déterminer A . Déterminer $B = \{x \mid x \in A, x^2 + f^2(x) \in 5\mathbb{Z}\}$.

17) m désigne le p.p.c.m. de deux nombres entiers a et b , d est leur p.g.c.d.. Déterminer les nombres a et b pour que $m + 11d = 203$.

18) On divise 644 et 1095 par un même nombre, les restes sont respectivement 15 et 22 ; quel est ce nombre ?

19) D'après Léonard d'Euler : « Une troupe d'hommes et de femmes a dépensé dans une auberge 1000 sous ; les hommes ont payé 19 sous chacun et les femmes 13. Combien - y avait - il d'hommes et de femmes ?

20) Le nombre réel $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est-il rationnel ? A quelle condition sur les entiers p et q le nombre réel

$$\frac{\ln p}{\ln q}$$
 est-il rationnel ?

21) 6 divise-t-il $n^3 - n$ quel que soit l'entier n ?

22) Trouver deux entiers a et b tels que $a^2 - b^2 = 24$. Même question avec p (p nombre premier).

23) On considère $N = p^a q^b r^c$, où p, q, r nombres premiers deux à deux distincts et a, b et c entiers non nuls. Quel est le nombre de diviseurs de N ? Quelle est la forme générale d'un tel nombre qui a dix-huit diviseurs ? Quel est le plus petit de ces nombres ?

24) Montrer que 5 est le seul nombre premier de la forme $n^4 + 4$.

25) Le nombre $2^{2^5} - 1$ est-il premier ?

26) Montrer que quel que soit l'entier naturel n , $n^7 - n$ est divisible par 42.

27) La décomposition de a en produit de facteurs premiers donne : $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2}$, a^2 possède 81 diviseurs, combien a^3 a-t-il de diviseurs ?

28) Soit p un nombre premier tel que $2^p - 1$ soit premier. On considère le nombre

$$n = (2^p - 1) \times 2^{p-1}$$

a) Quels sont les diviseurs de n ? (n exclu), énumérez-les.

b) Prouvez que la somme de ces diviseurs (n exclu) est égale à n .

