ELASTICITE

Exemples d'approche

1- Si, lorsque le revenu d'un ménage donné augmente de 4%, on constate que sa consommation alimentaire augmente de 3%, on dira que l'élasticité vaut 0.75 (coefficient multiplicateur permettant de passer de 4 à 3).

2- Si, lorsque le prix unitaire d'un réfrigérateur diminue de 2%, sa demande sur le marché augmente de 1%, on dira que l'élasticité vaut -0.5.
On peut alors penser qu'une baisse de 3% (respectivement 1%)du prix entraînerait une hausse des ventes de 1.5% (respectivement 0.5%).
Mais il serait sans doute hasardeux d'affirmer qu'une baisse de 60% du prix doperait les ventes de 30%.

Un cas général classique : l'élasticité de la demande par rapport au prix.

Pour un certain produit, la quantité globale achetée q est fonction de son prix unitaire p ; autrement dit, $q = f(p)$, où f est une fonction de $]0;+\infty[$ vers $]0;+\infty[$.
Pour un produit de consommation courante, la fonction f est décroissante sur $]0;+\infty[$; pour un produit de luxe, f peut être croissante (effet de snobisme).

Lorsque le prix unitaire passe de p à $p+h$ (variation absolue h et variation relative $\frac{h}{p}$), la demande évolue alors de $f(p)$ à $f(p+h)$ (variation absolue $f(p+h)-f(p)$ et variation relative $\frac{f(p+h)-f(p)}{f(p)}$).
Par définition, l'élasticité de la demande par rapport au prix entre p et $p+h$ est le nombre

$$\frac{\dfrac{f(p+h)-f(p)}{f(p)}}{\dfrac{(p+h)-p}{p}}$$

c'est-à-dire $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\times\frac{p}{f(p)}$.

Si f est une fonction affine $p \to ap+b$, l'élasticité sera indépendante de h et vaudra $a\times\frac{p}{f(p)}$.
Dans les autres cas, l'élasticité entre p et $p+h$ dépendra de h
Cependant, pour des valeurs de h voisines de 0 (petites variations de prix), elle pourra être approchée par le nombre

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\times\frac{p}{f(p)}\right]$$

c'est-à-dire , $\frac{p\,f'(p)}{f(p)}$, s'il existe.

On est amené à définir ainsi l'élasticité de la demande par rapport au prix comme étant la fonction e de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telle que

$$e(p)=\frac{p\,f'(p)}{f(p)}.$$

On remarque que $e(p)$ a le même signe que $f'(p)$.

Interprétation géométrique

Pour tout point M d'abscisse p de la représentation graphique $\boldsymbol{C}$ de la fonction f, on note

H et K les projetés respectifs de M sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

T l'intersection de l'axe des ordonnées avec la tangente $\boldsymbol{T}$ à la courbe $\boldsymbol{C}$ en M

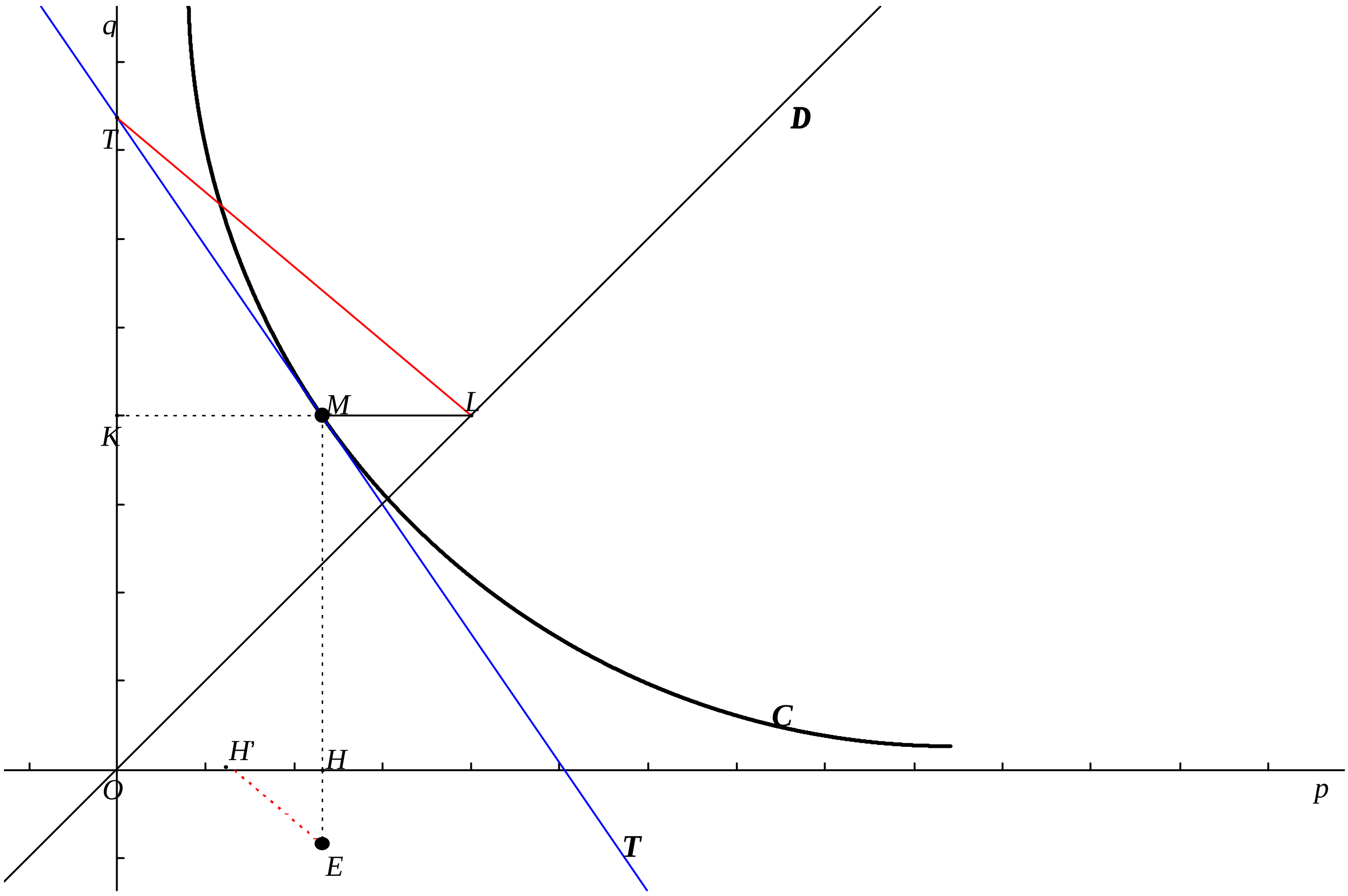
L le point d'ordonnée $f(p)$ de la droite $\boldsymbol{D}$ d'équation $q = p$.

Les points T et L ont pour coordonnées respectives $(0; f(p) - pf'(p))$ et $(f(p); f(p))$, si bien que le vecteur $\overrightarrow{TL}$ a pour coordonnées $(f(p); pf'(p))$.

Donc, l'élasticité $e(p)$ est égale au coefficient directeur de la droite (TL).

La droite parallèle à la droite (TL) passant par le point H' $(p-1;0)$ coupe la droite (HM) au point E $(p;e(p))$.

On peut ainsi tracer point par point la représentation graphique de la fonction élasticité e.



Elasticités mutuelles de la demande et du prix

Si f est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]0;+\infty[$ et si on note f^{-1} sa bijection réciproque, l'élasticité du prix par rapport à la demande est la fonction

$$e_{p/q} : q \rightarrow \frac{q(f^{-1})'(q)}{f^{-1}(q)}.$$

En appliquant alors, lorsque $q = f(p)$, l'égalité $(f^{-1})'(q) = \dfrac{1}{f'(p)}$, Il est alors facile de déduire que l'élasticité du prix par rapport à la demande en q est l'inverse de l'élasticité de la demande par rapport au prix en p, c'est-à-dire

$$e_{p/q}(q) = \frac{1}{e_{q/p}(p)}.$$

Exemples d'exercice

1- Une famille ayant un revenu mensuel de 12500 F consacre 4200 F pour son alimentation.
L'élasticité de la dépense alimentaire par rapport au revenu est $0{,}7$.
A combien peut-on estimer la dépense alimentaire si le revenu devient 13000 F ?

2- Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f : p \to \frac{1}{3}p^3 - 20p^2 + 76p + 7500.$$

Sur quel intervalle la fonction f peut-elle être valablement considérée comme une fonction de demande d'un bien de consommation courante, p désignant le prix unitaire de ce produit ?
Déterminer son élasticité.

3- La quantité q d'un bien et son prix unitaire p sont liés par la relation : $p(1+2q) = 22$.
Calculer q en fonction de p, puis, p en fonction de q.
Déterminer l'élasticité de la demande par rapport au prix, puis, l'élasticité du prix par rapport à la demande.
Comparer la première pour $p = 2$ avec la deuxième pour $q = 5$.

4- Démontrer que les fonctions puissances ont une élasticité constante.

5- Déterminer les fonctions à élasticité linéaire (en liaison avec l'équation différentielle $\frac{f'}{f} = a$ du nouveau programme de Terminale ES).