Cette séquence est extraite de la brochure « espace modules 1°S » publiée au [CRDP d'Aquitaine](). Elle a pour objectif de comparer deux approximations du nombre dérivé d'une fonction numérique en un point, l'une issue de la définition mathématique usuelle et l'autre utilisée en Sciences Physiques, et s'articule au scénario d'introduction de la dérivée suggéré par le document d'accompagnement des programmes [rentrée 2001] de 1°S (paragraphe 6 / dérivée, page 11/30).

DÉRIVONS EN VITESSE

Un point M se déplace sur une droite. Sa position à l'instant t est caractérisée par son abscisse dans le repère (O, I) : $x = f(t)$ où f est une fonction dérivable en t_0.

Par définition, on appelle vitesse instantanée de M à l'instant t_0 le nombre dérivé de f en t_0 : $f'(t_0)$.

Dans la pratique, on utilise deux valeurs approchées de cette vitesse :

$V(t_0\,;h) = \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0-h)}{2h}$ pour h « assez petit » (approximation plutôt utilisée en Sciences Physiques),

$W(t_0\,;h) = \dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$ pour h « assez petit » (approximation plutôt utilisée en mathématiques).

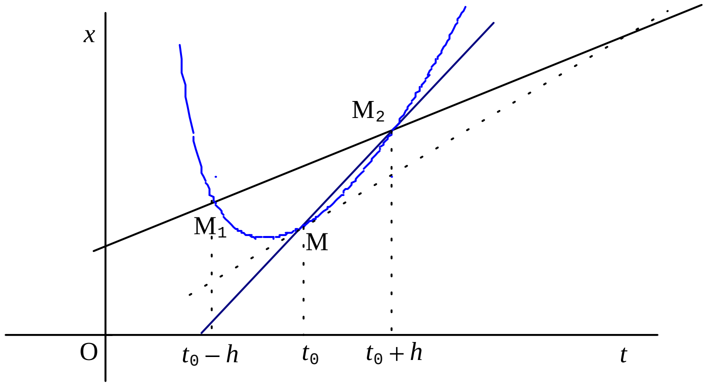
On se propose de comparer ces deux approximations.

À cet effet, on introduit les nombres $\varphi(t_0\,;h) = V(t_0\,;h) - f'(t_0)$ et $\mu(t_0\,;h) = W(t_0\,;h) - f'(t_0)$.

REMARQUE

$V(t_0\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (M_1M_2).

$W(t_0\,;h)$ est le coefficient directeur de la droite (MM_2).



A. Légitimité de l'approximation de $f'(t_0)$ par $V(t_0\,;h)$

Soit f une fonction dérivable en t_0 et $f'(t_0)$ le nombre dérivé de f en ce point.

1. Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h}=f'(t_0)$.

2. Vérifier que $V(t_0\,;h)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}+\dfrac{f(t_0)-f(t_0-h)}{h}\right]$ et en déduire $\lim\limits_{h\to 0}V(t_0\,;h)=f'(t_0)$.

B. Comparaison des approximations dans des cas particuliers

1. Mouvement uniforme : $f(t)=at+b$ $(a\neq 0)$.

   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0\,;h)$, $W(t_0\,;h)$.

   b. Calculer $\varphi(t_0\,;h)$ et $\mu(t_0\,;h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.

   c. Conclure.

2. Mouvement uniformément accéléré : $f(t) = at^2 + bt + c$ $(a \neq 0)$.

   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0 ; h)$, $W(t_0 ; h)$.

   b. Calculer $\varphi(t_0 ; h)$ et $\mu(t_0 ; h)$. Expliquer géométriquement ces résultats.

   c. Conclure.

3. Mouvement de loi horaire $f(t) = t^3$.

   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0 ; h)$, $W(t_0 ; h)$.

   b. Calculer $\varphi(t_0 ; h)$ et $\mu(t_0 ; h)$.

   c. On se place à l'instant $t_0 = 1$; expliciter $\varphi(1 ; h)$ et $\mu(1 ; h)$.

   Démontrer que, pour tout h élément de $]-0{,}1 ; 0{,}1[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(1;h)}{\mu(1;h)}\right| < 1$. Conclure.

4. Mouvement de loi horaire $f(t) = \dfrac{1}{t}$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

   a. Calculer $f'(t_0)$, $V(t_0 ; h)$, $W(t_0 ; h)$.

   b. Calculer $\varphi(t_0 ; h)$, $\mu(t_0 ; h)$ et $\dfrac{\varphi(t_0 ; h)}{\mu(t_0 ; h)}$.

   c. Déterminer un nombre réel strictement positif ε tel que, pour tout nombre réel h élément de l'intervalle $]-\varepsilon ; +\varepsilon[$, on a $\left|\dfrac{\varphi(t_0 ; h)}{\mu(t_0 ; h)}\right| < 1$. Conclure.

C. Rôle de l'hypothèse de dérivabilité

Les deux approximations du nombre dérivé de f en t_0 supposent évidemment la dérivabilité de f en t_0 (passée peut-être inaperçue !).

Soit $f(t) = |t|$. La fonction f est-elle dérivable en zéro ?

Calculer $V(0\,;h)$ et $W(0\,;h)$. Donner les valeurs exactes de $V(0\,;10^{-6})$ et de $W(0\,;10^{-6})$. Conclure.

Remarque :

De nombreuses calculatrices donnent le nombre dérivé d'une fonction en un point t_0, mais elles affichent en fait la valeur de $V(t_0\,;h)$ pour h « très petit ».

D Exemple

À l'instant $t = 0$, on lâche une balle, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 5 m.

On suppose que, durant sa chute, la distance $f(t)$ entre la balle et le sol est définie par $f(t) = -5t^2 + 5t$, que la balle touche le sol à l'instant $t = 1$ puis rebondit.

On suppose alors que, entre le premier et le second rebond (à l'instant $t = 2{,}5$), la distance entre la balle et le sol est définie par $f(t) = -5t^2 + 17{,}5t - 12{,}5$.

En résumé $\begin{cases} f(t) = -5t^2 + 5 & \text{si} \quad 0 \le t \le 1 \\ f(t) = -5t^2 + 17{,}5t - 12{,}5 & \text{si} \quad 1 \le t \le 2{,}5 \end{cases}$

1. À l'instant $t = 1$, on considère :

$$V(1\,;h) = \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \quad \text{et} \quad W(1\,;h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad \text{où } -10^{-1} < h < 10^{-1}.$$

   a. Calculer $V(1\,;h)$ et $W(1\,;h)$ en distinguant $h > 0$ et $h < 0$.

b. Donner les valeurs exactes de $V(1\,;10^{-6})$, $V(1\,;-10^{-6})$, $W(1\,;10^{-6})$ et $W(1\,;-10^{-6})$.

c. Peut-on utiliser ces résultats pour émettre des conjectures sur la vitesse de la balle à l'instant $t=1$?

2. a. Montrer que $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ admet une limite lorsque h tend vers zéro par valeurs négatives et lorsque h tend vers zéro par valeurs positives.

Ces limites sont respectivement appelées nombre dérivé de f à gauche en 1 et nombre dérivé de f à droite en 1. On les note $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$.

La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

b. Calculer $\dfrac{1}{2}(f'_g(1)+f'_d(1))$. Que constate-t-on ?

3. Plus généralement, soit une fonction numérique f de la variable réelle t, définie sur un intervalle ouvert I, admettant, en un point t_0 de l'intervalle I, un nombre dérivé à gauche $f'_g(t_0)$ et un nombre dérivé à droite $f'_d(t_0)$.

Démontrer que $V(t_0\,;h)=\dfrac{1}{2}(f'_g(t_0)+f'_d(t_0))$ lorsque h tend vers zéro.